Polynome - Aufgaben

Actualisé: 18 avril 2018

vers. 1.0.0

1 Notions de base

Coefficients

Divisbilité

1. (Inde 89) Montrer que le polynôme $x^4 + 26x^3 + 52x^2 + 78x + 1989$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.
2. Si a n'est pas divisible par 5 alors le polynôme $x^5 - x + a$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

PGCD et PPCM

Les zéros d'un polynôme

1. (CH 05) Soit $n \geq 2$ un nombre naturel. Montrer que le polynôme
$$(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)(x^2 - 3^2) \cdots (x^2 - n^2) + 1$$
ne peut pas être écrit comme produit de deux polynômes non constants à coefficients entiers.
2. (Tchéquie 2000) Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients entiers. Montrer que le polynôme
$$Q(x) = P(x)P(x^2)P(x^3)P(x^4) + 1$$
n'admet pas de zéros entiers.
3. (CH 2000) Soit $P(x)$ un polynôme de degré n, pour lequel on a
$$P(k) = \frac{k}{k+1} \qquad \text{si } k = 0, 1, \ldots, n.$$
Trouver $P(n+1)$.

2 Polynômes symétriques

Polynômes symétriques élémentaires

1. (CH 03) Les nombres réels x, y, a satisfont les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x + y &= a \\ x^3 + y^3 &= a \\ x^5 + y^5 &= a. \end{aligned}$$

   Déterminer toutes les valeurs possibles de a.

2. Pour les nombres réels a, b, c on a $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$ et $abc > 0$. Montrer que $a, b, c > 0$.

3. Montrer que le polynôme $(x^2 - 1)(y^2 - 1)(z^2 - 1)$ peut s'écrire comme produit de deux polynômes symétriques non constants.

4. Trouver tous les triplets (a, b, c) de nombres naturels tels que pour tous les réels x, y, z avec $x + y + z = 0$ on ait

$$\left(\frac{x^a + y^a + z^a}{a}\right)\left(\frac{x^b + y^b + z^b}{b}\right) = \left(\frac{x^c + y^c + z^c}{c}\right).$$

Les formules de Viète

2.1 (CH 04) Für die rellen Zahlen a, b, c, d gelten die Gleichungen

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}}, \qquad b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}},$$
$$c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}}, \qquad d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}.$$

Zeige, dass gilt $abcd = 2004$.

2.2 (Ungarn 83) Sei $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1$ ein Polynom mit positiven reellen Koeffzienten. Nehme an, P habe n reelle Nullstellen. Zeige, dass gilt

$$P(2) \geq 3n.$$

2.3 (IMO 88) Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$$

erfüllen, eine Vereinigung disjunkter Intervallen ist, wobei die Summe aller Intervallängen 1988 beträgt.

3 Autres Exercices

3.1 Montrer que le produit de quatre nombres naturels consécutifs +1 est toujours un carré.

3.2 Pour quels nombres naturels n a-t-on

$$x^2 + x + 1 \,|\, x^{2n} + x^n + 1?$$

3.3 (USA 74) Soient a, b, c trois entiers distincts et P un polynôme à coefficients entiers. Montrer que les trois équations

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$

ne peuvent pas être satisfaites en même temps.

3.4 (OMI 93) Soit $n > 1$ un nombre naturel. Montrer que le polynôme $x^n + 5x^{n-1} + 3$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

3.5 (USA 77) Trouver tous les couples (m, n) de nombres naturels pour lesquels on a

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^m \,|\, 1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{mn}.$$

3.6 (CH 03) Trouver tous les polynômes $Q(x) = ax^2 + bx + c$ à coefficients entiers tels qu'il existe trois nombres premiers distincts p_1, p_2, p_3 avec

$$|Q(p_1| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = 11.$$

3.7 (CH 99) Montrer qu'à tout polynôme de degré 10 à coefficients entiers on peut associer une suite arithmétique infinie (dans les deux sens) de nombres entiers qui ne contient aucune des valeurs $P(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3.8 Déterminer la plus petite valeur possible de $a^2 + b^2$ si l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ ne possède que des zéros réels.

3.9 (OMI 02) Trouver tous les couples (m, n) de nombres naturels avec $m, n \geq 3$ tels que pour une infinité de nombres naturels a l'expression

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

est un nombre premier.

3.10 (OMI 04) Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous les nombres réels a, b, c avec $ab + bc + ca = 0$ on ait l'équation suivante :

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c).$$