Ungleichungen 1

Arnaud Maret

Aktualisiert: 9. Januar 2019
vers. 2.1.1

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die *Ungleichungen* gehören zu den gefürchtetsten aller Aufgaben, die typischerweise bei der Olympiade auftauchen. Mit genug Erfahrung im Anwenden der wichtigsten Tricks lassen sie sich oft in kurzer Zeit lösen, aber es ist auch möglich sich stundenlang die Zähne auszubeissen und gar nichts herauszufinden. Während sie früher äusserst beliebt an der IMO waren, tauchen heutzutage aus dem Gebiet der Algebra eher Aufgaben auf, die weniger standard sind. Um sich in der geheimnisvollen Welt der Ungleichungen zurechtzufinden ist es wie immer unerlässlich, eine grosse Zahl von Aufgaben zu lösen.

Ungleichungen sind weit verbreitet in der Mathematik. Manche Resultate aus diesem Skript sind auch in der Zahlentheorie, in Kombinatorik oder manchmal sogar in der Geometrie nützlich. Darum empfiehlt es sich die zugrunde liegenden Sätze kennenzulernen, welche in diesem Skript immer in grau eingerahmt sind. Genau so wichtig sind die dazugehörigen Beispiele.

Dieser Text bietet eine neue Präsentation des Stoffs, welche auf dem exzellenten Skript von Thomas Huber basiert. Die in Sätzen vorgestellten Ungleichungen sind in drei, ihrer Natur entsprechenden, Abschnitte unterteilt. Die Idee für dieses Schema kommt von Samin Riasat[1]. Neben den Sätzen werden auch einige wohlbekannte Tricks in den Beispielen aufgezeigt. Eine weitere Quelle der Inspiration für dieses Skript ist die Arbeit von Evan Chen[2].

1.1 Ein erstes Beispiel

Im Kontext der Olympiade sind Ungleichungen etwas ganz anderes als in der Schule. Typischerweise sucht man in der Schule für eine gegebene Ungleichung die Menge der Lösungen, die die Ungleichung erfüllen. An der Mathematikolympiade dagegen erhalten wir eine Ungleichung und wollen beweisen, dass sie erfüllt ist, egal welche Werte wir für die Variablen einsetzen. Das sieht zum Beispiel wie folgt aus:

Beispiel 1. *Zeige, dass für alle reellen Zahlen x, y und z gilt*

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

In Worten sagt man: der Ausdruck $x^2+y^2+z^2$ ist immer grösser oder gleich dem Ausdruck $xy + yz + zx$.

[1] Samin Riasat, *Basics of Olympiad Inequalities.*
[2] Evan Chen, *Brief Introduction to Olympiad Inequalities.*

Um zu zeigen, dass so eine Ungleichung stimmt, muss man durch eine Folge von algebraischen Umformungen eine andere Ungleichung erhalten von der man bereits weiss, dass sie korrekt ist. Zum Beispiel weiss man, dass das Quadrat einer reellen Zahl immer eine nichtnegative Zahl ist. Zudem ist das Quadrat einer reellen Zahl genau dann gleich null, wenn die Zahl selber gleich null ist. In anderen Worten:

$$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Wie können wir nun die Ungleichung aus dem Beispiel mit Quadraten verbinden? Zuerst bemerken wir, dass $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ äquivalent ist zu $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq 0$. Also könnte eine Strategie für den Beweis der Ungleichung sein, den Ausdruck $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ zu bearbeiten bis Quadrate auftauchen. Dies ist der wirklich subtile und schwierige Teil dieser Aufgabe.

Die Terme xy, yz und zx erinnern an die Produkte, die beim Ausmultiplizieren der Quadrate $(x\pm y)^2, (y\pm z)^2$ und $(z\pm x)^2$ entstehen, ausser dass der Koeffizient 2 fehlt. Stattdessen tauchen die Terme xy, yz und zx auf, wenn man $1/2(x\pm y)^2, 1/2(y\pm z)^2$ et $1/2(z\pm x)^2$ ausmultipliziert. Mit dieser Beobachtung kommt man nun leicht auf die folgende Gleichung:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2.$$

Wie angekündigt können wir nun schliessen, dass der Ausdruck $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ immer nichtnegativ ist, da er gleich der Hälfte der Summe von drei Quadraten ist. Also haben wir bewiesen, dass der Ausdruck $x^2+y^2+z^2$ immer grösser oder gleich $xy+yz+zx$ ist für alle reellen x, y oder z.

Die ganze Schwierigkeit der Aufgabe lag im algebraischen Trick, den Ausdruck $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ als Summe von Quadraten zu schreiben. Mit der richtigen Idee sind die Lösungen von Ungleichungen oft wie hier ziemlich kurz. Das heisst aber nicht, dass die Aufgaben einfach sind! Zu Beginn sind Ungleichungen kompliziert und verwirrend und wie immer hilft nur Erfahrung, um sie schätzen zu lernen.

Bei Ungleichungen wird oft die zusätzliche Frage nach den *Gleichheitsfällen* gestellt. Unter den Gleichheitsfällen versteht man die Menge der Werte, für die die Ungleichung zu einer Gleichung wird. In unserem Beispiel ist das die Menge der Tripel reeller Zahlen (x, y, z), für die $x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx$ gilt. In den allermeisten Fällen ist das Finden der Gleichheitsfälle eine Formalität, sobald die Ungleichung bewiesen ist, da der Lösungsweg dabei hilft die Gleichheitsfälle zu finden. In unserem Beispiel haben wir

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 = xy+yz+zx &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{2}(y-z)^2 + \frac{1}{2}(z-x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \Leftrightarrow x=y \\ y-z=0 \Leftrightarrow y=z \\ z-x=0 \Leftrightarrow z=x. \end{cases} \end{aligned}$$

Also erhalten wir genau diejenigen Tripel (x, y, z) sodass $x=y=z$ eine beliebige reelle Zahl ist.

1.2 Die Spielregeln der Ungleichungen

In der Schule lernt man, dass man das Ungleichheitszeichen einer Ungleichung drehen muss, falls man beide Seiten der Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert. Genau dasselbe passiert wenn man den Kehrwert beider Seiten nimmt. Dies sind zwei der grundlegenden Regeln für das Manipulieren von Ungleichungen. Wir listen nun ohne weiteren Kommentar alle nötigen Regeln auf, welche aus der Schule bekannt sein sollten.

Theorem 11. *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

1. *Falls* $a \geq c$ *und* $c \geq b$*, dann gilt* $a \geq b$, $\forall a, b, c$.
2. *Falls* $a \geq b$ *und* $c \geq d$*, dann gilt* $a+c \geq b+d$, $\forall a, b, c, d$, *(die Umkehrung dieser Aussage ist im Allgemeinen offensichtlich falsch).*
3.
   - *Falls* $x > 0$*, dann gilt* $a \geq b \Leftrightarrow ax \geq bx$, $\forall a, b$.
   - *Falls* $x < 0$*, dann gilt* $a \geq b \Leftrightarrow ax \leq bx$, $\forall a, b$.
4. *Es gilt* $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *und* $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
5.
   - *Falls* $x > 0$*, dann gilt* $a \geq b \Leftrightarrow a^x \geq b^x$, $\forall a, b \geq 0$. *Zum Beispiel, falls* $a \geq b \geq 0$*, dann gilt* $a^2 \geq b^2$*, oder* $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ *(dass* a, b *nichtnegativ sind ist essentiell).*
   - *Falls* $x < 0$*, dann gilt* $a \geq b \Leftrightarrow a^x \leq b^x$, $\forall a, b > 0$. *Zum Beispiel, falls* $a \geq b > 0$*, dann gilt* $1/a \leq 1/b$.
6. *Allgemeiner:*
   - *Falls* f *eine wachsende Funktion ist, dann gilt* $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
   - *Falls* f *eine fallende Funktion ist, dann gilt* $a \geq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.

An dieser Stelle ist es nützlich, ein abstraktes Schema für das Lösen von Ungleichungen vorzustellen. Wie schon im Beispiel gesehen soll man bei einer Ungleichung zeigen, dass

$$A(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n)$$

gilt, wobei die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ manchmal gewisse Bedingungen erfüllen, zum Beispiel $x_1, \ldots, x_n \geq 0$ oder $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Meistens benutzen wir die Buchstaben a, b, c, d für positive Zahlen und x, y, z, w für reelle Zahlen. Die Buchstaben A und B stehen für zwei algebraische Ausdrücke, welche eventuell auch einfach Konstanten sein könnten. Es ist immer möglich gewisse algebraische Manipulationen auf die ursprüngliche Ungleichung anzuwenden, zum Beispiel könnte man beide Seiten mit 2 multiplizieren, oder B von beiden Seiten abziehen. Schlussendlich bleibt aber immer eine Ungleichung zwischen zwei Ausdrücken.

Eine Lösungsstrategie besteht aus einer Folge von Ausdrücken $A_1, \ldots, A_m$, sodass

$$A(x_1, \ldots, x_n) \geq A_1(x_1, \ldots, x_n) \geq \ldots \geq A_m(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei jede neue Ungleichung direkt aus einem bereits bekannten Resultat folgt. Bildlich gesprochen sucht man einen Weg von A nach B. Genug Abstraktion, gehen wir zum Konkreten über.

2 Die Macht der Quadrate

2.1 Das ewige AM-GM

Unter allen Ungleichungen ist diejenige zwischen dem arithm-boxetischen Mittel (AM) und dem geometrischen Mittel (GM) die berühmteste.

Theorem 21 (AM-GM)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n \geq 0$* ***nichtnegative*** *Zahlen. Dann gilt*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Es gilt genau dann Gleichheit wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Beweis. Der hier gezeigte Beweis ist induktiv über die Anzahl Variablen und wurde ursprünglich von Cauchy gefunden. Wir nennen Ω_n die Aussage, dass die Ungleichung für genau $n \geq 1$ Variablen stimmt. Das Ziel ist zu zeigen, dass Ω_n für alle $n \geq 1$ stimmt. Idealerweise möchte man zeigen, dass $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n+1}$, was der klassischen Induktion entspricht. Es ist aber nicht klar, wie man das machen könnte. Stattdessen werden wir sehen, dass es relativ leicht ist, $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{2n}$ zu zeigen. Um dann die Induktion abzuschliessen genügt es $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n-1}$ zu beweisen, angenommen der Basisfall ist bereits überprüft. Beginnen wir also mit dem Fall $n = 2$, denn für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich:

1. Ω_2: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

   Das Idee ist, diese Ungleichung auf eine bereits bekannte zurückzuführen. In diesem Fall benutzen wir, wie in der Einleitung, eine algebraische Umformung mit dem Ziel Quadrate zu erhalten. Es gilt

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0.$$

   Die Ungleichung stimmt also für alle $a, b \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann wenn $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$, was wie gewünscht äquivalent ist $a = b$.

2. Ω_3: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

   Diesen Fall explizit zu behandeln ist nicht nötig für die Induktion, aber der Lösungsweg ist interessant und man sollte ihn sich merken. Zuerst fällt einem die dritte Wurzel auf der rechten Seite auf, welche eher unangenehm ist und man würde sie lieber loswerden. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, zum Beispiel könnte man beide Seiten zur dritten Potenz nehmen. Während die rechte Seite dann simpel ist, erhalten wir auf der linken Seite viele Terme und einen Koeffizienten $3^3 = 27$. Eine bessere und subtilere Option ist es, drei neue Variablen einzuführen. Seien $x := \sqrt[3]{a}, y := \sqrt[3]{b}$ und $z := \sqrt[3]{c}$. Die Ungleichung wird zu

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0.$$

Diese Substitution ist nicht unbedingt nötig und noch kein entscheidender Schritt hin zur Lösung. Trotzdem erlaubt sie es einen besseren Überblick über die zu zeigende Ungleichung zu erhalten.

Nun tritt die Magie des Falls $n = 3$ hervor. In diesem Spezialfall gibt es eine Faktorisierung des zu minimierenden Ausdrucks:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

Der erste Faktor ist offensichtlich nichtnegativ, da x, y und z es bereits sind. Das Beispiel aus der Einleitung zeigt, dass der zweite Faktor auch nichtnegativ ist. Also gilt $x^3+y^3+z^3-3xyz \geq 0$ wie gewünscht. Gleichheit gilt genau dann wenn einer der beiden Faktoren gleich 0 ist. Im ersten Fall $x + y + z = 0$ sind gezwungenermassen alle drei Variablen gleich 0. Den zweiten Fall $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ kennen wir bereits, dann müssen alle drei Variablen gleich sein. Insgesamt erhalten wir Gleichheit genau dann wenn $x = y = z$, das heisst wenn $a = b = c$.

3. $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{2n}$.

   Wir wollen AM-GM für $2n$ Variablen zeigen unter der Annahme, dass die Ungleichung für n Variablen gilt. Die Idee ist einfach. Die $2n$ Variablen können in zwei Gruppen von n Variablen eingeteilt werden, auf welche man dann die Induktionsannahme anwenden kann. Danach lässt sich AM-GM auf die beiden verbleibenden Terme anwenden.

$$\begin{aligned}
\frac{a_1 + \ldots + a_{2n}}{2n} &= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}_{\geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{a_{n+1} + \ldots + a_{2n}}{n}}_{\geq \sqrt[n]{a_{n+1} \ldots a_{2n}}} \\
&\geq \frac{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}}{2} \\
&\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{2n}}.
\end{aligned}$$

   Die erste Ungleichung besteht aus zwei Anwendungen von Ω_n auf die einzelnen Brüche. In der zweiten Ungleichung wendet man Ω_2 auf das Mittel der beiden $n$ten Wurzeln an. Insgesamt erhalten wir das Gewünschte. Gleichheit erhalten wir genau dann wenn Gleichheit in beiden Abschätzungen gilt. Auf Grund der Anwendungen von Ω_n erhalten wir $a_1 = \ldots = a_n$ und $a_{n+1} = \ldots = a_{2n}$. Die Anwendung von Ω_2 impliziert $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{2n}}$. Wenn wir diese beiden Bedingungen kombinieren erhalten wir $a_1 = \ldots = a_{2n}$.

4. $\Omega_n \Rightarrow \Omega_{n-1}$.

   Wir nehmen an, dass $\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$ für alle $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ gilt. Es ist nicht zu erwarten, dass dieser Fall extrem schwierig ist, denn Ω_n hat einen Freiheitsgrad mehr als Ω_{n-1}. Um Ω_{n-1} zu zeigen wenden wir Ω_n an, wobei wir für a_n einen geschickt gewählten Wert einsetzen.

   Aufgrund der Symmetrie bietet sich die Wahl $a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}$ an. Wir benutzen nun die Ungleichung Ω_n mit den Variablen $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}})$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} &\geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}} \\ &= \sqrt[n-1]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} \\ &= a_n.\end{aligned}$$

   Wenn wir alle Terme mit a_n auf der rechten Seite sammeln, ergibt sich

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n} \geq a_n - \frac{a_n}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot a_n.$$

   Diese Ungleichung können wir nun wie gewünscht zu Ω_{n-1} umschreiben:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_{n-1}}{n-1} \geq a_n = \sqrt[n-1]{a_1 \ldots a_{n-1}}.$$

   Die Gleichheitsfälle für Ω_{n-1} folgen direkt aus der Anwendung von Ω_n, es muss $a_1 = \ldots = a_{n-1}$ gelten.

□

AM-GM ist nicht korrekt für negative Zahlen. Zum Beispiel erhält man für $n = 3$ einen Widerspruch, wenn man AM-GM mit dem Tripel $(-1, -1, 2)$ anwendet. Wenn n gerade ist, dann ist die Wurzel nicht unbedingt definiert wenn einige Zahlen negativ sind.

Beispiel 2. *Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

Lösung. Dies ist eine klassische Anwendung von AM-GM. Da wir eine Summe von Brüchen, die ähnliche Nenner und Zähler haben, nach unten abschätzen wollen, können wir die folgende Methode versuchen. Man wendet direkt AM-GM für n Variablen an:

$$\frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_1}} = 1.$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit n erhalten wir das Gewünschte. □

Beispiel 3. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Lösung 1. In dieser Aufgabe könnte man damit anfangen, den Ausdruck auf der linken Seite auszumultiplizieren. Dann erhält man die neue Ungleichung

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Dann können wir einfach AM-GM mit $n = 6$ auf die Summe links anwenden:

$$\begin{aligned} a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b &\geq 6 \cdot \sqrt[6]{a^2b \cdot a^2c \cdot b^2a \cdot b^2c \cdot c^2a \cdot c^2b} \\ &= 6abc, \end{aligned}$$

wobei wir direkt mit 6 multipliziert haben, um uns das Aufschreiben des Bruchs zu sparen. □

Lösung 2. Stattdessen ist es möglich, wenn auch mit mehr Gehirnschmalz verbunden, AM-GM drei mal auf die drei Summen der linken Seite der ursprünglichen Gleichung anzuwenden. Dann erhält man

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &\geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \\ &= 8abc. \end{aligned}$$

In beiden Lösungen erhalten wir die Gleichheitsfälle $a = b = c$. □

Beispiel 4 (IMO 2012, Aufgabe 2)**.** *Seien $n \geq 3$ eine ganze Zahl und $a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen sodass $a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Dann gilt*

$$(1 + a_2)^2 \ldots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Lösung. In diesem Beispiel treffen wir zwei Neuheiten an. Einerseits haben wir eine zusätzliche Bedingung an die Variablen, nämlich dass ihr Produkt gleich 1 ist. Andererseits müssen wir eine strikte Ungleichung zeigen. Grundsätzlich ändert dies aber nichts an unserer Herangehensweise.

Der Grund warum dieses Beispiel zu diesem Zeitpunkt des Skripts gezeigt wird, ist dass verdeutlicht werden soll, dass man die Schwierigkeit einer Aufgabe nicht an seiner Lösung ablesen kann. Denn dieses Problem war immerhin die zweite Aufgabe der IMO 2012. Der Lösungsweg benutzt einen fundamentalen Trick für das Lösen von Ungleichungen: *die Zerlegung von Konstanten.*

Für die erste Verwirrung beim Lesen der Aufgabe sorgt wohl das Fehlen der Variable a_1. Zudem ist die linke Seite der Ungleichung nicht homogen in den Variablen, das heisst die Variablen treten mit verschiedenen Exponenten auf. Eine sinnvolle Idee ist es, irgendwo das Produkt der $n - 1$ Variablen auftauchen zu lassen um dann Vereinfachungen zu erhalten. Um dieses Ziel zu erreichen, versuchen wir den Term $(1 + a_i)^i$ durch a_i alleine abzuschätzen ohne irgendwelche anderen Exponenten als den vom linearen Term zu erhalten. Dieser Schritt ist der grösste Teil dieser Aufgabe.

Der Trick wird sein, die 1 des Ausdrucks $1 + a_i$ als Summe von $i - 1$ Zahlen zu schreiben, damit $1 + a_i$ eine Summe von i Termen wird. Dann könnte man AM-GM mit i Variablen anwenden. Die einfachste Art dies zu tun ist $1 = 1/(i-1) + \ldots + 1/(i-1)$ zu schreiben. Dann ergibt AM-GM

$$\frac{\frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{i-1} + a_i}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}}$$

und nach Umformung

$$(1+a_i)^i \geq \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} \cdot a_i.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $a_i = 1/(i-1)$. Multiplizieren dieser Ungleichungen für die Indizes $i = 2, \ldots, n$ liefert ein Teleskopprodukt:

$$(1+a_2)^2 \ldots (1+a_n)^n \geq \underbrace{\frac{2^2}{1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}}_{=n^n} \cdot \underbrace{a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}_{=1} = n^n.$$

Um nun eine strikte Ungleichung zu erhalten müssen wir noch jegliche Gleichheitsfälle ausschliessen. In der letzten Ungleichung hatten wir Gleichheit genau dann wenn $a_i = 1/(i-1)$ für alle $i = 2, \ldots, n$. Dann ist aber das Produkt der a_i strikt kleiner als 1 (da $n \geq 3$), das heisst der Gleichheitsfall kann nicht eintreten. □

Man kann sich fragen, was passiert wenn bei der Anwendung von AM-GM mit n Variablen einige der a_i mehrfach im Bruch vorkommen. Angenommen a_1 kommt m_1 mal vor, a_2 kommt m_2 mal vor und so weiter bis zur letzten Variablen a_k, die m_k mal vorkommt. Die m_i sind natürliche Zahlen sodass $m_1 + \ldots + m_k = n$. Dann erhalten wir

$$\frac{\overbrace{a_1 + \ldots + a_1}^{m_1} + \ldots + \overbrace{a_k + \ldots + a_k}^{m_k}}{m_1 + \ldots + m_k} \geq (\underbrace{a_1 \cdot \ldots \cdot a_1}_{m_1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a_k \cdot \ldots \cdot a_k}_{m_k})^{1/n}.$$

Oder anders aufgeschrieben

$$\frac{m_1 a_1 + \ldots + m_k a_k}{m_1 + \ldots + m_k} \geq a_1^{\frac{m_1}{n}} \cdot \ldots \cdot a_k^{\frac{m_k}{n}}.$$

Wenn wir $\omega_i := m_i/n = m_i/(m_1 + \ldots + m_k)$ definieren, dann gelten $\omega_1 + \ldots + \omega_k = 1$ und

$$\omega_1 a_1 + \ldots + \omega_k a_k \geq a_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\omega_k}.$$

So erhält man die gewichtete Version von AM-GM. Diese Ungleichung gilt für positive reelle Zahlen ω_i mit Summe 1, welche *Gewichte* genannt werden. Jedes a_i gehört zu einem Gewicht und die Summe der Gewichte ist 1. Im Englischen heisst dieses Resultat *weighted* AM-GM (weighted = gewichtet).

Theorem 22 (Gewichtetes AM-GM). *Seien $a_1, \ldots, a_k$ **nichtnegative** reelle Zahlen und $\omega_1, \ldots, \omega_k$ nichtnegative reelle Zahlen sodass $\omega_1 + \ldots + \omega_k = 1$. Dann gilt*

$$\omega_1 a_1 + \ldots + \omega_k a_k \geq a_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot a_k^{\omega_k}.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $a_i = a_j$ für alle Paare von Indizes (i, j) sodass $\omega_i \neq 0$ und $\omega_j \neq 0$.

Das obige Argument beweist diesen Satz wenn alle ω_i rationale Zahlen sind. Den allgemeinen Fall verschieben wir ans Ende des Skripts.

Beispiel 5. *Sei a eine nichtnegative reelle Zahl. Dann gilt*

$$a^5 + 1 \geq a^3 + a^2.$$

Lösung. Diese Aufgabe sieht so aus als könnte man sie mit analytischen Methoden lösen. Es gibt aber eine hübsche Lösung mit gewichtetem AM-GM. Woher man weiss, dass es so einen Beweis gibt? Weil $5 + 0 = 3 + 2$! Das sind die Exponenten von a, die in der Ungleichung auftauchen (wobei $1 = a^0$).

Nun müssen wir die richtigen Gewichte finden, sei dafür $0 < c < 1$ eine reelle Zahl. Wir machen den Ansatz

$$ca^5 + (1 - c) \geq a^{5c} \cdot 1^{1-c} = a^{5c}.$$

Um die beiden Terme a^2 und a^3 der rechten Seite der ursprünglichen Gleichung zu erhalten, müssen wir also diese Ungleichung anwenden mit $c_1 = 3/5$ und $c_2 = 2/5$. Dann ist $c_1 + c_2 = 1$! Wir erhalten

$$\begin{cases} 3/5 \cdot a^5 + 2/5 \geq a^3 \\ 2/5 \cdot a^5 + 3/5 \geq a^2. \end{cases}$$

Aufsummieren dieser Ungleichungen liefert das Gewünschte. □

Beispiel 6. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $a + b + c = 3$. Dann gilt*

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

Lösung. In diesem Beispiel werden nun die Variablen selber zu den Gewichten. Wie aber können wir gewichtetes AM-GM hier anwenden? Die linke Seite der Ungleichung erinnert an die rechte Seite von gewichtetem AM-GM. Weiter sieht die Bedingung an die Variablen aus wie die Bedingung an die Gewichte, ausser dass die Summe nicht 1 ist. Da aber

$$a^b b^c c^a \leq 1 \Leftrightarrow (a^b b^c c^a)^{1/3} \leq 1$$

und $a/3 + b/3 + c/3 = 1$ gelten, können wir gewichtetes AM-GM mit den Variablen a, b, c und den Gewichten $b/3, c/3, a/3$ verwenden. Wir erhalten

$$\frac{b}{3} \cdot a + \frac{c}{3} \cdot b + \frac{a}{3} \cdot c \geq a^{b/3} b^{c/3} c^{a/3}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq (a^b b^c c^a)^{1/3}.$$

Um fertig zu machen, müssen wir also noch $ab + bc + ca \leq 3$ unter der Nebenbedingung $a + b + c = 3$ zeigen.

Da wir eine Ungleichung beweisen wollen, in der $ab+bc+ca$ von oben beschränkt wird, ist es sinnvoll die uns wohlbekannte Ungleichung $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ zu verwenden. Wenn wir bei eben dieser Ungleichung auf beiden Seiten $2(ab+bc+ca)$ addieren und die rechte Seite faktorisieren, erhalten wir

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2.$$

In unserem Fall gilt $a+b+c=3$, also wird diese (bereits bewiesene) Ungleichung zu

$$3(ab+bc+ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab+bc+ca \leq 3.$$

□

2.2 Cauchy-Schwarz und Hölder

Aus AM-GM lässt sich eine weitere Ungleichung herleiten, welche auch sehr praktisch ist. Im allgemeinen handelt sie von Skalarprodukten und Längen von Vektoren, aber hier behandeln wir eine algebraische Version.

Theorem 23 (Cauchy-Schwarz, kurz CS)**.** *Seien $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ reelle Zahlen (nicht unbedingt positiv). Dann gilt*

$$(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2) \geq (x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn reelle Zahlen λ_1 und λ_2 existieren sodass $\lambda_1 x_i = \lambda_2 y_i$ gilt für alle $i = 1, \ldots, n$. Anders gesagt sind die Vektoren $(x_1; \ldots; x_n)$ und $(y_1; \ldots; y_n)$ kollinear:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass $x_iy_j = x_jy_i$ gilt für alle Paare von Indizes (i,j).

Cauchy-Schwarz ist eine Konsequenz von AM-GM. Im Beweis der Ungleichung werden wir ein neues Konzept genauer anschauen, nämlich Homogenität.

Definition 2.1. Ein algebraischer Ausdruck $A(x_1, \ldots, x_n)$ in mehreren Variablen heisst *homogen vom Grad k* falls für alle reellen Zahlen θ gilt

$$A(\theta x_1, \ldots, \theta x_n) = \theta^k A(x_1, \ldots, x_n).$$

Eine Ungleichung heisst *homogen vom Grad k* falls beide Seiten homogene Ausdrücke vom Grad k sind.

In anderen Worten ist ein Ausdruck mehrerer Variablen homogen, falls man jede Variable mit demselben Faktor θ multiplizieren kann und dadurch der gesamte Ausdruck mit einer

Potenz von θ multipliziert wird. Zum Beispiel ist $x_1^3 + 2x_2^3 - x_1x_2^2$ homogen vom Grad 3 und

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}$$

ist homogen vom Grad -1. Dagegen sind $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 1$ und $x_1 + x_2^2$ nicht homogene Ausdrücke. Der Vorteil beim Arbeiten mit homogenen Ungleichungen ist, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, dass ein beliebiger homogener Ausdruck der Variablen einen bestimmten Wert hat. Dieser Vorgang wird *Normalisierung* genannt. Angenommen wir haben zwei homogene Ausdrücke A und B vom Grad k und möchten eine Ungleichung der Form

$$A(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n)$$

zeigen, wobei die x_i alle positiv sind. Auf Grund der Homogenität stimmt die Ungleichung für die Variablen $(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann wenn sie für $(\theta x_1, \ldots, \theta x_n)$ mit $\theta > 0$ stimmt. **Achtung!** Dies funktioniert nur wenn θ positiv ist. Man hat

$$\begin{aligned} A(\theta x_1, \ldots, \theta x_n) \geq B(\theta x_1, \ldots, \theta x_n) \Leftrightarrow \\ \theta^k \cdot A(x_1, \ldots, x_n) \geq \theta^k \cdot B(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow \\ A(x_1, \ldots, x_n) \geq B(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz stimmt nur, weil $\theta^k > 0$. Wie können wir nun diese Beobachtung ausnutzen? Zum Beispiel dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, dass $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Warum? Weil es, wie wir gerade gesehen haben, gleichbedeutend ist, die Ungleichung für $(x_1, \ldots, x_n)$ oder für $(x_1/(x_1 + \ldots + x_n), \ldots, x_n/(x_1 + \ldots + x_n))$ zu zeigen. Und im zweiten Fall ist die Summe der Variablen gleich 1. Aus demselben Grund könnte man nach Multiplikation aller Variablen mit $2/\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ annehmen, dass die Bedingung $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 4$ gilt. Als letztes Beispiel könnte man auch nach Multiplikation aller Variablen mit $1/x_n$ annehmen, dass $x_n = 1$ gilt.

Wir sehen also, dass Homogenität eine nützliche Eigenschaft einer Ungleichung ist, da wir immer den Wert eines homogenen Ausdrucks mehrerer Variablen festsetzen könnten. Die Wahl dieses Ausdrucks liegt bei uns und er sollte passend zu der vorliegenden Ungleichung gewählt, das heisst mit dem Ziel die Ungleichung zu vereinfachen. **Achtung!** Eine Ungleichung mittels Homogenität zu vereinfachen ist nie ein entscheidender Schritt zur Lösung hin, aber es hilft um die Ungleichung besser zu verstehen.

Wenn man eine Ungleichung *standard* nennt, dann versteht man darunter unter anderem dass sie homogen ist. Wenn man sich vorstellt, dass die vorkommenden Grössen physikalische Einheiten hätten, so würde Homogenität die Sinnhaftigkeit des gesamten Ausdrucks garantieren. Daher ist Homogenität eine natürliche Eigenschaft.

Falls ihr eine Normalisierung in einer Lösung verwendet, dann wird natürlich erwartet, dass ihr diese Umformung der Ungleichung begründet. Dies könnte wie im folgenden Beweis aussehen.

Beweis von Cauchy-Schwarz. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist homogen vom Grad 2 in den Variablen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Zudem ist sie in diesem Spezialfall homogen vom Grad 2 in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ alleine. Das heisst die Ungleichung ist invariant unter Multiplikation der x_i mit einer reellen Zahl $\theta > 0$.

Gilt $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, so sind alle x_i gleich 0. Offensichtlich stimmt die Ungleichung in diesem Fall. Falls $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \neq 0$, so können wir alle x_i mit $1/\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ multiplizieren und dürfen dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Es bleibt also zu zeigen, dass

$$y_1^2 + \ldots + y_n^2 \geq (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2$$

unter der Nebenbedingung $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ gilt. Diese neue Ungleichung ist auch homogen vom Grad 2, diesmal in den Variablen $y_1, \ldots, y_n$ ist. Daher können wir wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit $y_1^2 + \ldots + y_n^2 = 1$ annehmen. Die Ungleichung wird

$$1 \geq x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Diese Form ist deutlich einfacher als zu Beginn. Der Beweis lässt sich nun mit AM-GM einfach vollenden. Wir wissen, dass $x_i y_i \leq (x_i^2 + y_i^2)/2$ gilt. Also erhalten wir wie gewünscht

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n &\leq \frac{x_1^2 + y_1^2}{2} + \ldots + \frac{x_n^2 + y_n^2}{2} \\ &= \frac{\overbrace{x_1^2 + \ldots + x_n^2}^{=1}}{2} + \frac{\overbrace{y_1^2 + \ldots + y_n^2}^{=1}}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Zuletzt finden wir die Gleichheitsfälle. Durch die Anwendungen von AM-GM erhalten wir, dass Gleichheit genau dann gilt wenn $x_i = y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Man darf aber nicht vergessen, dass wir die Variablen mit dem Inversen der Wurzel der Summe der Quadrate multipliziert haben. Dieser Koeffizient muss beim Finden der Gleichheitsfälle beachtet werden, weshalb wir schlussendlich Gleichheit genau dann haben, wenn es ein λ gibt sodass $x_i = \lambda y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$. □

Beispiel 7 (AM-HM)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n$ **positive** relle Zahlen. Dann gilt*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Lösung. Die rechte Seite der Ungleichung heisst *harmonisches Mittel* (HM) der a_i. Dieses Beispiel ist eine weitere Ungleichung über die verschiedenen Mittel. Es gibt ein viertes Mittel, welches *quadratisches Mittel* (QM) genannt wird. Der Beweis der verschiedenen Ungleichungen zwischen diesen Mitteln ist Teil des Aufgabenblatts.

Die AM-HM Ungleichung lässt sich wie folgt umschreiben:

$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Dies sieht ein bisschen aus wie Cauchy-Schwarz. Da die a_i positive reelle Zahlen sind, können wir neue Variablen $b_i := \sqrt{a_i}$ einführen. Die Ungleichung wird zu

$$(b_1^2 + \ldots + b_n^2)\left(\left(\frac{1}{b_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{b_n}\right)^2\right) \geq n^2.$$

Dies ist eine direkte Anwendung von Cauchy-Schwarz. Es gilt

$$(b_1^2 + \ldots + b_n^2)\left(\left(\frac{1}{b_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{b_n}\right)^2\right) \geq \left(b_1 \cdot \frac{1}{b_1} + \ldots + b_n \cdot \frac{1}{b_n}\right)^2 = n^2.$$

□

An dieser Stelle sollte das folgende Detail hervorgehoben werden: Wenn man CS auf das Produkt zweier Summen anwendet, **dann muss man überprüfen, dass jeder Summand beider Summen eine nichtnegative Zahl ist**. In der Formulierung von CS ist jeder Summand ein Quadrat einer reellen Zahl und daher nichtnegativ. Wir könnten Cauchy-Schwarz also auch wie folgt aufschreiben:

Theorem 24 (Cauchy-Schwarz, *bis*)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$* ***nichtnegative*** *reelle Zahlen. Dann gilt*

$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \geq \left(\sqrt{a_1 b_1} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}\right)^2.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn die Vektoren $(a_1; \ldots; a_n)$ und $(b_1; \ldots; b_n)$ kollinear sind.

Das folgende Beispiel ist ein typischer Fall, in dem Cauchy-Schwarz ein naheliegender Ansatz ist. Die Ungleichung selbst ist gut zu wissen und kann in seltenen Fällen angewendet werden.

Beispiel 8 (Nesbitt)**.** *Seien a, b, c* ***positive*** *reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $a = b = c$.

Lösung. Das hier gezeigte Beispiel ist die Standardsituation schlechthin für die Anwendung von CS: Wir wollen eine Summe von Brüchen nach unten Abschätzen. Die Idee ist, die linke Seite der Ungleichung mit der Summe der Produkte der Zähler und der entsprechenden Nenner zu multiplizieren. Dann wenden wir CS auf dieses Produkt an. Merkt euch diesen Ansatz, auch *clearing denominators* genannt, denn er ist oft anwendbar und immer einen Versuch wert.

Da alle Variablen positiv sind können wir CS anwenden und es gilt

$$(a(b+c)+b(c+a)+c(a+b))\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)^2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Daher sind wir fertig, wenn wir jetzt noch $(a+b+c)^2/2(ab+bc+ca) \geq 3/2$ zeigen. Dies ist wiederum äquivalent zu $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$. Das ist die Ungleichung aus der Einleitung. Gleichheit gilt genau dann wenn $a = b = c$. Der Gleichheitsfall unserer Anwendung von CS ist noch allgemeiner, daher erhalten wir insgesamt die Fälle $a = b = c$. □

Beispiel 9. *Seien a, b, c, d vier reelle Zahlen sodass $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Finde den grössten Wert, den der Ausdruck $a + 2b + 2c + 4d$ annehmen kann.*

Lösung. Bei dieser Art von Aufgabe, auch Optimisierungsproblem genannt, gilt es nach dem Finden des gesuchten Wertes zwei Dinge zu erledigen. Erstens müssen wir beweisen, dass der Ausdruck $a + 2b + 2c + 4d$ wirklich immer kleiner oder gleich als dieser Wert ist. Zweitens müssen wir zeigen, dass dieser Wert für ein gewisses Quadrupel von Zahlen wirklich angenommen wird. Anders gesagt heisst dies, dass es mindestens einen Gleichheitsfall gibt. Fehlt einer dieser Schritte, so können wir nicht sicher sein, ob es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Bis jetzt waren in allen Beispielen die extremalen Werte dann aufgetreten, wenn alle Variablen gleich waren. In diesem Beispiel sind die Gleichheitsfälle weniger offensichtlich, da die Koeffizienten der Variablen verschieden sind. Daher ist im Vornherein nicht klar welche Zahl wir als Maximum vermuten könnten.

Nichtsdestotrotz erinnert die Nebenbedingung an die linke Seite von Cauchy-Schwarz. Vielleicht reicht es ja, wenn wir die Koeffizienten in der zweiten Klammer der linken Seite einführen! Dann erhalten wir

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+2^2+2^2+4^2) \geq (a+2b+2c+4d)^2$$

und weiter

$$|a+2b+2c+4d| \leq 5.$$

Beachte, dass der Ausdruck $a + 2b + 2c + 4d$ negativ sein kann und man daher die Absolutbeträge beim Wurzelziehen nicht vergessen darf. Da eine Zahl immer kleiner oder gleich ihrem Betrag ist, gilt $a + 2b + 2c + 4d \leq 5$ für alle a, b, c, d.

Um zu schliessen, dass 5 wirklich das gesuchte Maximum ist, müssen wir einen Gleichheitsfall finden. Dazu benutzen wir die Anwendung von CS und sehen, dass Gleichheit genau dann auftritt wenn

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = \frac{d}{4}.$$

Zudem müssen die Variablen $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ erfüllen. Auflösen dieses Systems liefert den Gleichheitsfall $(a, b, c, d) = (1/5, 2/5, 2/5, 4/5)$. Daher ist 5 der gesuchte Wert. $\square$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz ist ein Spezialfall einer allgemeineren Ungleichung, welche Hölder heisst. Wegen der grossen Anzahl Variablen ist es schwierig die Ungleichung auf eine einfache Art und Weise aufzuschreiben.

Theorem 25 (Hölder). *Sei $m \geq 1$ eine ganze Zahl, welche* Grad der Ungleichung *heisst. Sei x_{ij} eine Kollektion reeller Zahlen (nicht unbedingt positiv) wobei $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, m$. Dann gilt*

$$\prod_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (x_{ij})^m \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} x_{ij} \right)^m.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $x_{ij}x_{lk} = x_{ik}x_{lj}$ für alle $i, l = 1, \ldots, n$ und für alle $j, k = 1, \ldots, m$. Das heisst genau dann wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gibt sodass

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \ldots = \lambda_m \begin{pmatrix} x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix},$$

also wenn die m Vektoren $(x_{11}; \ldots; x_{1n}), \ldots, (x_{m1}; \ldots; x_{mn})$ kollinear sind oder wenn einer der Vektoren der Nullvektor ist.

Anstatt die Ungleichung einfach auswendig zu lernen macht es mehr Sinn, wenn man versucht zu verstehen warum der Fall $m = 2$ genau Cauchy-Schwarz ist. Der Fall $m = 3$ ist in der Praxis auch ziemlich nützlich, während der allgemeine Fall eher selten benutzt wird. Wenn der Grad $m = 3$ ist, sieht die Ungleichung von Hölder wie folgt aus:

Theorem 26 (Hölder vom Grad 3). *Seien $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$ reelle Zahlen (nicht unbedingt positiv). Dann gilt*

$$(x_1^3 + \ldots + x_n^3)(y_1^3 + \ldots + y_n^3)(z_1^3 + \ldots + z_n^3) \geq (x_1y_1z_1 + \ldots + x_ny_nz_n)^3.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die drei Vektoren $(x_1; \ldots; x_n), (y_1; \ldots; y_n)$ und $(z_1; \ldots; z_n)$ kollinear sind oder einer der Vektoren der Nullvektor ist.

Cauchy-Schwarz ist ein sinnvoller Ansatz, wenn es darum geht, eine Summe von Brüchen nach unten abzuschätzen, da die Ungleichung es erlaubt die Zähler loszuwerden. Ähnlich lässt sich Hölder vom Grad m auf Brüche anwenden, in denen $(m-1)$te Wurzeln vorkommen. Wir zeigen diese Methode am Beispiel einer bekannten Aufgabe von der IMO 2001.

Beispiel 10 (IMO 2001, Aufgabe 2)**.** *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Lösung. Wir wollen also eine Summe von Brüchen nach unten abschätzen, in denen Quadratwurzeln vorkommen. Daher wenden wir Hölder vom Grad 3 wie folgt an: Wir multiplizieren das Quadrat der linken Seite mit der Summe der Produkte der Zähler und Nenner, wobei wir bei den Nennern die Wurzeln weglassen. Das heisst wir betrachten den folgenden Ausdruck:

$$\left(a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\right)\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\right)^2.$$

Da alle Variablen positiv sind, erhalten wir mit Hölder, dass dieser Ausdruck grösser oder gleich $(a+b+c)^3$ ist. Dies ist äquivalent zu

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}}.$$

Also müssen wir noch $(a+b+c)^3 \geq a^3+b^3+c^3+24abc$ zeigen. Wenn wir die dritte Potenz auf der linken Seite ausrechnen, kürzen sich die Terme a^3, b^3, c^3 weg. Es bleibt

$$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geq 6abc.$$

Diese Ungleichung haben wir bereits angetroffen und folgt aus AM-GM. □

2.3 Muirhead, der Bulldozer

In diesem Abschnitt schauen wir Ungleichungen zwischen polynomiellen Ausdrücken (keine Wurzeln, kein Sinus etc.), welche zudem symmetrisch und homogen sind, genauer an. Wir haben bereits die folgenden polynomiellen Ungleichungen angetroffen:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca, \\ a^3+b^3+c^3 \geq 3abc, \\ a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b \geq 6abc, \\ a^5+1 \geq a^3+a^2. \end{cases}$$

Alle diese Ungleichungen, ausser die Letzte, sind Ungleichungen zwischen polynomiellen Ausdrücken in a, b, c, welche auch symmetrisch und homogen mit Graden $2, 3$ respektive 3 sind. Intuitiv gesehen dominieren "die grössten Exponenten"die gleichmässiger verteilten Exponenten. Nachdem wir die nötigen Definition aufgeschrieben haben, lässt sich diese intuitive Beobachtung mit dem sogenannten Satz von Muirhead formalisieren. Zuerst benötigen wir das Konzept der Majorisierung von Exponenten.

Definition 2.2. Seien $p = (p_1, \ldots, p_n)$ und $q = (q_1, \ldots, q_n)$ zwei Vektoren reeller Zahlen (nicht unbedingt positiv). Man sagt, dass p den Vektor q *majorisiert* (oder *dominiert*), wofür wir die Notation $p \succeq q$ benutzen, falls

1. $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$ und $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n$,
2. $p_1 + \ldots + p_n = q_1 + \ldots + q_n$,
3. $p_1 + \ldots + p_k \geq q_1 + \ldots + q_k$ für alle $k = 1, \ldots, n-1$.

Zum Beispiel gelten $(5,1) \succeq (3,2)$ und $(2,0,0) \succeq (1,1,0)$, oder auch $(5,3,-1) \succeq (4,2,1)$ und $(1,0,\ldots,0) \succeq (1/n, \ldots, 1/n)$.

Um Muirhead effizient anwenden zu können, führen wir noch *symmetrische Summen* ein. Hierbei handelt es sich um eine Notation, welche es uns manchmal erleichtert komplizierte, lange Ausdrücke aufzuschreiben. Die symmetrische Summe eines Ausdrucks ist die Summe aller Ausdrücke, welche man durch eine Permutation der Variablen des originalen Ausdrucks erhält. **Achtung!** Eine symmetrische Summe mit n Variablen enthält immer $n!$ Terme, da es genau $n!$ verschiedene Permutationen gibt. Das Konzept lässt sich leichter mit der Hilfe von Beispielen erklären. Für drei Variablen gilt zum Beispiel

$$\begin{cases} \sum_{sym} abc = abc + acb + bac + bca + cab + cba = 6abc, \\ \sum_{sym} a^2b = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b, \\ \sum_{sym} ab = ab + ac + ba + bc + ca + cb = 2(ab + bc + ca). \end{cases}$$

Die symmetrischen Summen sind nicht zu verwechseln mit den *zyklischen Summen*, welche manchmal in anderen Texten auftauchen. Die zyklische Summe enthält nur diejenigen Ausdrücke, welche durch eine **zyklische** Permutation entstehen. Insbesondere enthält die zyklische Summe eines Ausdrucks mit n Variablen genau n Terme. Zum Beispiel gelten

$$\begin{cases} \sum_{cyc} abc = abc + bca + cab = 3abc, \\ \sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a, \\ \sum_{cyc} ab = ab + bc + ca. \end{cases}$$

Sind $a_1, \ldots, a_n$ **positive** reelle Zahlen und ist $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ein Vektor reeller Zahlen, so schreiben wir

$$[p] := \sum_{sym} a_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{p_n}.$$

Zum Beispiel ist $[(2,0,0)] = 2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ und $[(1/2, 1/2)] = 2\sqrt{a_1 a_2}$.

Theorem 27 (Muirhead, a.k.a. Bunching)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n$ **positive** reelle Zahlen und p, q zwei Vektoren reeller Zahlen (nicht unbedingt positiv). Dann gilt*

$$p \succeq q \Rightarrow [p] \geq [q].$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $p = q$ oder wenn alle a_i gleich sind.

Wir können Muirhead anwenden um einige der bereits gesehenen Ungleichungen zu beweisen. Zum Beispiel gelten

$$(2,0,0) \succeq (1,1,0) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$$
$$(3,0,0) \succeq (2,1,0) \succeq (1,1,1) \Rightarrow 2(a^3+b^3+c^3) \geq \sum_{sym} a^2b \geq 6abc,$$
$$(5,0) \succeq (3,2) \Rightarrow a^5+b^5 \succeq a^3b^2+b^3a^2.$$

AM-GM folgt auch aus Muirhead:

$$\begin{aligned}(1,0,\ldots,0) \succeq (1/n,\ldots,1/n) &\Rightarrow (n-1)! \cdot (a_1+\ldots+a_n) \geq n! \cdot a_1^{1/n} \ldots a_n^{1/n} \\ &\Rightarrow \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.\end{aligned}$$

Muirhead ist ein extrem starkes Werkzeug. Haben wir eine symmetrische, homogene und polynomielle Ungleichung gegeben, so können wir immer versuchen alles auszumultiplizieren, sie in der Form symmetrischer Summen aufzuschreiben und dann Muirhead anzuwenden. Das funktioniert natürlich nicht immer. Trotz seiner Nützlichkeit kann Muirhead aber auch sehr schnell langweilig werden. Heutzutage kommen mit Muirhead lösbare Ungleichungen kaum noch an Olympiaden vor. Schauen wir uns trotzdem ein paar Beispiele an.

Beispiel 11 (USA 1997)**.** *Seien a, b, c drei positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Lösung. Die Ungleichung ist polynomiell, symmetrisch und homogen. Also könnten wir versuchen Muirhead anzuwenden. Dazu müssen wir aber zuerst alle Brüche loswerden. Wir benutzen sofort die Notation für symmetrische Summen. **Achtung!** Jede Summe enthält sechs Summanden, daher müssen wir einen Koeffizienten hinzufügen, um die überschüssigen Terme loszuwerden. Wir erhalten

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{sym} (a^3+b^3+abc)(a^3+c^3+abc)abc \leq (a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc).$$

Ausmultiplizieren liefert

$$\sum_{sym} a^7bc + 3a^4b^4c + 4a^5b^5c + a^3b^3c^3 \leq \sum_{sym} a^3b^3c^3 + 2a^6b^3 + 3a^4b^4c + 2a^5b^2c^2 + a^7bc$$

und nach Vereinfachung bleibt $\sum_{sym} a^7b^2 \geq \sum_{sym} a^5b^2c^2$ übrig. Diese Ungleichung ist korrekt, da $(7,2,0) \succeq (5,2,2)$. □

Beispiel 12. *Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen sodass $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Dann gilt*

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1 + \ldots + a_n.$$

Lösung. Die Ungleichung ist polynomiell und symmetrisch, aber nicht homogen. Genauer ist die linke Seite homogen vom Grad 2 und die rechte Seite homogen vom Grad 1. Der Trick ist nun, die Ungleichung mithilfe der Nebenbedingung zu *homogenisieren.* Wir multiplizieren die rechte Seite mit einem polynomiellen, symmetrischen und homogenen Ausdruck vom Grad 1. In unserem Fall bietet sich $(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}$ an. Dann wird die Ungleichung homogen vom Grad 2:

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \geq (a_1 \ldots a_n)^{1/n}(a_1 + \ldots + a_n).$$

Mit symmetrischen Summen geschrieben erhalten wir

$$\sum_{sym} a_1^2 \geq \sum_{sym} a_1^{\frac{n+1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \ldots a_n^{\frac{1}{n}}.$$

Da $(2, 0, \ldots, 0) \succeq ((n+1)/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ folgt diese Ungleichung aus Muirhead. $\square$

Für das letzte Beispiel ergänzen wir Muirhead um ein kleines Lemma.

Lemma 28. *Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ sowie q zwei Vektoren reeller Zahlen.*

1. *Falls $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, dann gilt $[(p_1, \ldots, p_n)] = [(p_1 - r, \ldots, p_n - r)]$ für alle reellen Zahlen r.*
2. *Falls $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n \geq 1$, dann gilt $[(p_1, \ldots, p_n)] \geq [(p_1 - r, \ldots, p_n - r)]$ für alle reellen Zahlen r.*
3. $\frac{[p]+[q]}{2} \geq \left[\frac{p+q}{2}\right]$.

Die ersten beiden Aussagen folgen sofort, wenn man die beiden Ausdrücke explizit aufschreibt. Die letzte Ungleichung ist eine Konsequenz von AM-GM, welche dem Leser als Übung überlassen sei.

Beispiel 13 (IMO 2005, Aufgabe 3)**.** *Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $abc \geq 1$. Dann gilt*

$$\frac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \frac{b^5 - b^2}{b^5 + c^2 + a^2} + \frac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Lösung. Die Ungleichung ist nicht homogen und es ist auch nicht klar wie wir sie homogenisieren könnten. Also greifen wir auf unser Lemma zurück. Wir beginnen wieder damit, die Nenner hochzumultiplizieren und alles auszumultiplizieren. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}[(9,0,0)] + 4[(7,5,0)] + [(5,2,2)] + [(5,5,5)] \geq [(6,0,0)] + [(5,5,2)] + 2[(5,4,0)] \\ + 2[(4,2,0)] + [(2,2,2)].\end{aligned}$$

Die Schwierigkeit der Aufgabe liegt nun darin, die Terme der linken Seite mit den richtigen Termen auf der rechten Seite zu kombinieren. Dies erfordert ein wenig Erfahrung im Umgang mit Ungleichungen dieser Form. Im allgemeinen ist der richtige Ansatz, den grössten Term der linken Seite mit dem grössten Term der rechten Seite zu verwursteln.

Mit Muirhead haben wir $[(9,0,0)] \geq [(7,1,1)]$. Da $abc \geq 1$ gilt, erhalten wir dank der zweiten Aussage des Lemmas, mit $r = 1$, dass $[7,1,1] \geq [6,0,0]$. Also insgesamt

$$[(9,0,0)] \geq [(6,0,0)].$$

Wieder mit Muirhead gilt

$$[(7,5,0)] \geq [(5,5,2)].$$

Ähnlich wie zuvor gilt mit Muirhead $[(7,5,0)] \geq [(6,5,1)]$ und durch die zweite Aussage des Lemmas, wieder mit $r = 1$, dass $[(6,5,1)] \geq [5,4,0]$. Zusammen folgt

$$2[(7,5,0)] \geq 2[(5,4,0)].$$

Nun kommt eine etwas subtilere Abschätzung. Wir wollen zeigen, dass

$$[(7,5,0)] + [(5,2,2)] \geq 2[(4,2,0)].$$

Mithilfe der dritten Aussage des Lemmas haben wir $[(7,5,0)] + [(5,2,2)] \geq 2[(6,7/2,1)]$. Weder mit dem Lemma alleine noch mit Muirhead alleine lässt sich $[(6,7/2,1)] \geq [(4,2,0)]$ zeigen. Stattdessen müssen wir beides kombinieren. Die Idee ist, eine reelle Zahl r zu finden sodass $(6-r)+(7/2-r)+(1-r) = 4+2$. Das entsprechende r ist $3/2$. Nun benutzen wir zuerst die zweite Aussage des Lemmas mit $r = 3/2$, um $[(6,7/2,1)] \geq [(9/2,2,-1/2)]$ zu erhalten. Dann zeigt eine Anwendung von Muirhead, dass $[(9/2,2,-1/2)] \geq [(4,2,0)]$.

Schliesslich impliziert die zweite Aussage des Lemmas, mit $r = 3$, dass

$$[(5,5,5)] \geq [(2,2,2)].$$

Aufsummieren der fünf Ungleichungen zeigt nun das Gewünschte. $\square$

3 Ordnung anstatt Unordnung

Sämtliche Resultate des vorigen Kapitels basierten auf dem Fakt, dass Quadrate nichtnegative sind. In diesem Kapitel dagegen werden wir Ungleichungen antreffen, die einen anderen Ursprung haben. Daher kann man diese neuen Werkzeuge als eine Familie ganz anderer Natur betrachten, welche uns erlaubt Ungleichungen zu lösen, die mit den bisherigen Resultaten nicht angreifbar sind.

3.1 Geordnete Folgen und Tchebychev

Das zentrale Resultat dieses Abschnitts ist intuitiv einfach zu verstehen und sein Beweis entspricht der Formalisierung unserer Intuition. Die Idee ist die folgende: Angenommen, ihr habt die Möglichkeit aus drei Säcken eine, zwei oder drei Münzen zu nehmen, wobei ein Sack Fünffrankenstücke, einer Zweifrankenstücke und der letzte Einfrankenstücke einthält. Dann maximiert ihr euren Gewinn indem ihr drei Fünffrankenstücke, zwei Zweifrankenstücke und ein Einfrankenstück auswählt.

Theorem 31 (Geordnete Folgen)**.** *Sei $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n$ eine geordnete Folge reeller Zahlen (nicht unbedingt positiv). Sei $y_1, \ldots, y_n$ eine zweite Folge reeller Zahlen und $z_1, \ldots, z_n$ eine Umordnung der Folge $y_1, \ldots, y_n$. Dann ist die Summe*

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_n z_n$$

maximal falls $z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_n$ (d.h. die beiden Folgen sind auf die gleiche Art geordnet) und ist minimal falls $z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_n$ (d.h. die beiden Folgen sind umgekehrt geordnet).

Beweis. Angenommen die Folgen (x_i) und (z_i) sind nicht gleich geordnet. Dann gibt es ein Paar von Indizes (j, k) sodass $x_j \geq x_k$ und $z_j \leq z_k$. Die Summe der Produkte sei

$$s_1 := x_1 z_1 + \ldots + x_j z_j + \ldots + x_k z_k + \ldots + x_n z_n.$$

Wir zeigen nun, dass das Vertauschen der Terme z_j und z_k zu einer Vergrösserung der Summe führt. Sei also

$$s_2 := x_1 z_1 + \ldots + x_j z_k + \ldots + x_k z_j + \ldots + x_n z_n.$$

Da sich s_1 und s_2 nur um zwei Summanden unterscheiden, ist die Differenz der Summen gleich

$$s_2 - s_1 = x_j z_k + x_k z_j - x_j z_j - x_k z_k = \underbrace{(x_j - x_k)}_{\geq 0} \underbrace{(z_k - z_j)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Also ist wie gewünscht $s_2 \geq s_1$. Wir schliessen, dass Umordnungen dieser Art, bis die (z_i) gleich geordnet sind wie die (x_i), nur zu einer Vergrösserung der Summe $\sum x_i z_i$ führen können. Am Ende, wenn beide Folgen gleich geordnet sind, muss die Summe also den grösstmöglichen Wert annehmen. Die zweite Aussage wird auf ähnliche Art und Weise bewiesen. □

Eine praktische Notation für geordnete Folgen sieht wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} (x_n) \\ (y_n) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n \end{bmatrix} := x_1 y_1 + \ldots + y_n y_n.$$

Ein wichtiges Konzept im Kontext der geordneten Folgen ist eine (bereits angetroffene) Idee, nämlich die Symmetrie.

Definition 3.1. Ein algebraischer Ausdruck $A(x_1, \ldots, x_n)$ mehrerer Variablen heisst *symmetrisch*, falls sich für alle Permutationen $y_1, \ldots, y_n$ der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ der Ausdruck A nicht verändert:

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(y_1, \ldots, y_n).$$

Eine Ungleichung heisst *symmetrisch*, falls beide Seiten symmetrische Ausdrücke sind und falls alle in der Aufgabe gestellten Nebenbedingungen symmetrisch in den Variablen sind.

Zum Beispiel sind $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ und $x_1 + x_2 + x_3 + 1$ symmetrische Ausdrücke in den Variablen x_1, x_2, x_3. Dagegen ist $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1$ nicht symmetrisch.

Wenn eine symmetrische Ungleichung vorliegt, so kann man die Variablen beliebig permutieren, ohne irgendetwas zu verändern. Also kann man ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, dass die Variablen der Grösse nach geordnet sind. Geben wir ein Beispiel.

Beispiel 14. *Die folgenden Ungleichungen gelten.*

1. *Sind x, y, z reelle Zahlen, so gilt $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$,*
2. *Sind $a, b, c \geq 0$, so gilt $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$.*

Lösung. Wir beginnen mit der ersten Ungleichung:

1. Diese Ungleichung kennen wir bereits. Wir haben sie durch eine Umformung zu Quadraten bewiesen, man könnte sie aber auch mit AM-GM, Cauchy oder mit Muirhead beweisen. Jetzt betrachten wir eine Lösung mit geordneten Folgen.

   Da die Ungleichung symmetrisch ist, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \geq y \geq z$ annehmen. Die Folgen x, y, z und x, y, z sind gleich geordnet. Dagegen ist die Folge y, z, x eine Umordnung von x, y, z. Darum folgt mit dem Satz über geordnete Folgen, dass

   $$\begin{bmatrix} x & y & z \\ x & y & z \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{bmatrix} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

2. Diese Ungleichung ist interessant, da sie nicht symmetrisch ist. Muirhead ist uns also keinerlei Hilfe hier, obwohl visuell eine gewisse Ähnlichkeit besteht. Zudem können wir die Variablen nicht der Grösse nach ordnen, was zum Glück gar nicht notwendig ist.

   Da die Variablen alle positiv sind und die Funktion $x \mapsto x^2$ auf den positiven reellen Zahlen steigend ist, gilt

   $$a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2.$$

   Insbesondere sind die Folgen a, b, c und a^2, b^2, c^2 gleich geordnet, auch wenn sie möglicherweise nicht monoton geordnet sind. Also folgt aus dem Satz über geordnete Folgen, dass

   $$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a & b & c \\ c^2 & a^2 & b^2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a.$$

□

Beispiel 15. *Sei $n \geq 2$ und seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen mit Summe $s := a_1 + \ldots + a_n$. Dann gilt*

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Lösung. Dieses Mal ist die Ungleichung symmetrisch, also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ annehmen. Beachte die folgende, immer wieder auftretende, Idee:

$$a_i \geq a_j \Leftrightarrow s - a_i \leq s - a_j \Leftrightarrow \frac{1}{s-a_i} \geq \frac{1}{s-a_j}.$$

Also gilt $1/(s-a_1) \geq \ldots \geq 1/(s-a_n)$. Das Beispiel ist etwas schwieriger als die vorigen, da eine einzelne Anwendung des Satzes über geordnete Folgen nicht ausreicht. Stattdessen wenden wir sie $n-1$ mal an, wobei wir die Variablen auf der rechten Seite zyklisch permutieren. Genauer gesagt sind die Folgen (a_i) und $(1/(s-a_i))$ gleich geordnet, weshalb der Satz über geordnete Folgen die Ungleichungen

$$\begin{gathered}
\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{a_1}{s-a_2} + \frac{a_2}{s-a_3} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_1}, \\
\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{a_1}{s-a_3} + \frac{a_2}{s-a_4} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_2}, \\
\vdots \\
\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{a_1}{s-a_n} + \frac{a_2}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_{n-1}}
\end{gathered}$$

liefert. Aufsummieren dieser Ungleichungen und Sammeln der Brüche mit demselben Nenner zeigt

$$(n-1)\left(\frac{a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{a_n}{s-a_n}\right) \geq \frac{s-a_1}{s-a_1} + \ldots + \frac{s-a_n}{s-a_n} = n,$$

woraus sofort die Behauptung folgt. □

Die Methode des letzten Beispiels lässt sich verallgemeinern und die resultierende Ungleichung heisst Ungleichung von Tchebychev.

Theorem 32 (Tchebychev)**.** *Seien $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ zwei Folgen reeller Zahlen (nicht unbedingt positiv).*

1. *Falls die beiden Folgen gleich geordnet sind, so gilt*

$$\frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}.$$

2. *Falls die beiden Folgen umgekehrt geordnet sind, so gilt*

$$\frac{x_1y_1 + \ldots + x_ny_n}{n} \leq \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n}.$$

Beweis. Angenommen die Folgen sind gleich geordnet. Auf Grund der Symmetrie dürfen wir $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ und $y_1 \geq \ldots \geq y_n$ annehmen. Wie im letzten Beispiel wenden wir n

mal den Satz über geordnete Folgen an, wobei wir die Variablen y_i zyklisch permutieren:

$$\begin{aligned} x_1y_1 + \ldots + x_ny_n &= x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n, \\ x_1y_1 + \ldots + x_ny_n &\geq x_1y_2 + x_2y_3 + \ldots + x_ny_1, \\ &\vdots \\ x_1y_1 + \ldots + x_ny_n &\geq x_1y_n + x_2y_1 + \ldots + x_ny_{n-1}. \end{aligned}$$

Nun müssen wir nur noch die n Ungleichungen addieren. Wir bemerken, dass jedes mögliche Produkt x_iy_j genau einmal auf der rechten Seite auftritt. In der Summe handelt es sich also um die Entwicklung von $(x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n)$. Darum erhalten wir

$$n(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) \geq (x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n),$$

was offensichtlich äquivalent ist zum Gewünschten. Der Beweis der zweiten Ungleichung funktioniert analog. □

Beispiel 16. *Seien a, b, c positive reelle Zahlen sodass $abc = 1$. Dann gilt*

$$\frac{a-1}{\sqrt{b+c}} + \frac{b-1}{\sqrt{c+a}} + \frac{c-1}{\sqrt{a+b}} \geq 0.$$

Lösung. Hier bemerken wir sofort die fehlende Homogenität, weshalb man zuerst eher an die Methoden aus dem zweiten Kapitel denken würde. Weiter ist die Ungleichung symmetrisch, weshalb wir $a \geq b \geq c$ annehmen dürfen.

Als nächstes bemerken wir die Minuszeichen, einige der Brüche könnten also negativ sein. Meistens hat man lieber keine negativen Vorzeichen. Um sie loszuwerden, schieben wir die negativen Ausdrücke alle auf die rechte Seite:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Beachte, dass aus $a \geq b \geq c$ die Ungleichungen $a + b \geq a + c \geq b + c$ folgen. Da die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ steigend ist, wird dies zu $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{a+c} \geq \sqrt{b+c}$. Schliesslich gilt für die Inversen

$$\frac{1}{\sqrt{b+c}} \geq \frac{1}{\sqrt{c+a}} \geq \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Also können wir die linke Seite mit Tchebychev nach unten abschätzen:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}\right).$$

Jetzt müssen wir nur noch $(a+b+c)/3 \geq 1$ zeigen um die Aufgabe abzuschliessen. Dafür benutzen wir die Nebenbedingung $abc = 1$ und eine einfache Anwendung von AM-GM:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} = 1.$$

□

Beispiel 17. *Seien $a_1, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$a_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \geq (a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)^{\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}}.$$

Lösung. Hier haben wir ziemlich merkwürdige Exponenten. Wenn Produkte von Variablen mit solchen Exponenten auftreten ist es oft nützlich Logarithm-boxen anzuwenden. Wir nehmen an, dass euch die grundlegenden Rechenregeln für den Logarithm-boxus bekannt sind. Zum Beispiel ist die Funktion $x \mapsto \log x$ (log steht hier für den natürlichen Logarithm-boxus) steigend, weshalb wir log auf beide Seiten der Ungleichung anwenden dürfen. Sie wird dann zu

$$a_1 \log a_1 + \ldots + a_n \log a_n \geq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)(\log a_1 + \ldots + \log a_n).$$

Das Aussehen dieser Ungleichung schreit nach Tchebychev. Wegen der Symmetrie dürfen wir $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ annehmen. Dann gilt auch $\log a_1 \geq \ldots \geq \log a_n$. Also folgt die Ungleichung oben aus einer Anwendung von Tchebychev. □

3.2 Schur, die Ausnahme

Die folgende Ungleichung ist nicht wie die bisherigen. Trotz der vorhandenen Homogenität und Symmetrie lässt sie sich nicht mit Muirhead beweisen. Sie wird zwar eher selten gebraucht, aber man sollte sie im Hinterkopf behalten falls alle anderen Methoden vergeblich sind.

Theorem 33 (Schur)**.** *Seien a, b, c* ***nichtnegative*** *reelle Zahlen und p eine positive Zahl. Dann gilt*

$$a^p(a-b)(a-c) + b^p(b-c)(b-a) + c^p(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $a = b = c$ oder wenn zwei der Variablen gleich sind und die dritte gleich 0.

Beweis. Wegen der Symmetrie dürfen wir $a \geq b \geq c$ annehmen. Aus einer simplen Umformung folgt, dass die Ungleichung äquivalent ist zu

$$\underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{(a^p(a-c) - b^p(b-c))}_{\geq 0} + c^p\underbrace{(a-c)}_{\geq 0}\underbrace{(b-c)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Offensichtlich stimmt diese Ungleichung, da alle Klammern auf der linken Seite positiv sind. Wir überlassen es dem Leser, die Gleichheitsfälle zu finden. □

In der Notation aus dem Abschnitt über Muirhead lässt sich die Ungleichung wie folgt aufschreiben:

$$[(p+2,0,0)] + [(p,1,1)] \geq 2[(p+1,1,0)].$$

Beachte, dass sich Schur weder mit Muirhead noch mit dem Lemma 2.8 beweisen lässt. Deshalb hat Schur so eine gesonderte Stellung in der Theorie der Ungleichungen.

Wir heben nun den Fall $p = 1$ von Schur gesondert hervor.

Theorem 34 (Spezialfall von Schur)**.** *Seien a, b, c **nichtnegative** reelle Zahlen. Dann gilt*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $a = b = c$ oder wenn zwei der Variablen gleich sind und die dritte gleich 0.

Beispiel 18. *Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen mit $a + b + c = 1$. Dann gilt*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc \geq \frac{1}{4}.$$

Lösung. Wie wir gesehen haben, ist es für diese Art von Aufgabe sinnvoll, die Ungleichung zu homogenisieren. Nach Multiplikation der rechten Seite mit $(a + b + c)^3 = 1$ erhalten wir

$$4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 24abc \geq (a + b + c)^3.$$

Ausmultiplizieren und Vereinfachen liefert dann genau Schur im Fall $p = 1$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b.$$

□

4 Konvex oder konkav, das ist die Frage

In diesem Abschnitt wollen wir ein paar weitere Ungleichungen vorstellen, die von eher analytischen Methoden ausgehen. Das zentrale Konzept ist die Konvexität oder Konkavität einer Funktion. Bildlich gesehen ist eine Funktion konkav, falls ihr Graph wie ein Hügel aussieht, und konvex falls ihr Graph wie ein Tal aussieht. Insbesondere ist f genau dann konvex, falls $-f$ konkav ist und umgekehrt. Beobachte, dass das Multiplizieren einer Funktion mit -1 einer Spiegelung des Graphs an der horizontalen Achse entspricht (Hügel werden zu Tälern und umgekehrt).

Genauso gut lassen sich Konvexität und Konkavität einer Funktion f mithilfe der ersten Ableitung f' oder der zweiten Ableitung f'' ausdrücken. Wir gehen davon aus, dass alle Funktionen (zweimal) differenzierbar sind. Trotzdem sind Konvexität und Konkavität auch für nicht-differenzierbare Funktionen definiert. Genauer gilt:

Definition 4.1. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heisst *konvex*, falls eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1. $f(ax + by) \leq af(x) + bf(y), \forall x, y \in I$ und $\forall a, b \in [0, 1]$ sodass $a + b = 1$,

2. $f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z), \forall x, z \in I$,
3. $f''(x) \geq 0, \forall x \in I$.

Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heisst *konkav*, falls eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist (man dreht einfach alle Ungleichheitszeichen):

1. $f(ax+by) \geq af(x)+bf(y), \forall x, y \in I$ und $\forall a, b \in [0,1]$ sodass $a+b=1$,
2. $f(x) \leq f(z) + f'(z)(x-z), \forall x, z \in I$,
3. $f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Man beachte, dass jeweils eine der drei Bedingungen genügt, um Konvexität oder Konkavität zu garantieren und falls eine erfüllt ist, so gelten auch die anderen beiden.

Auf den ersten Blick sehen diese drei Bedingungen ziemlich abstrakt aus. In Wahrheit sind sie die mathematische Formulierung einer einfachen Idee. Nehmen wir zum Beispiel die erste Bedingung:

$$f(ax+by) \leq af(x)+bf(y).$$

Angenommen es gilt $x < y$. Dann sagt uns diese Ungleichung, dass der Teil des Graphen von f, der die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ verbindet, unterhalb derjenigen Strecke verläuft, die diese beiden Punkte als Endpunkte hat (siehe Abbildung 1). Da $a+b=1$ und $a, b \in [0,1]$, liegt $ax+by$ auf der reellen Achse zwischen den beiden Punkten x und y, das heisst

$$x \leq ax+by \leq y.$$

Ähnlich stellt $af(x)+bf(y)$ einen Punkt zwischen $f(x)$ und $f(y)$ auf der vertikalen Achse dar. Dies garantiert, dass sich der Punkt mit Koordinaten $(ax+by, af(x)+bf(y))$ auf der

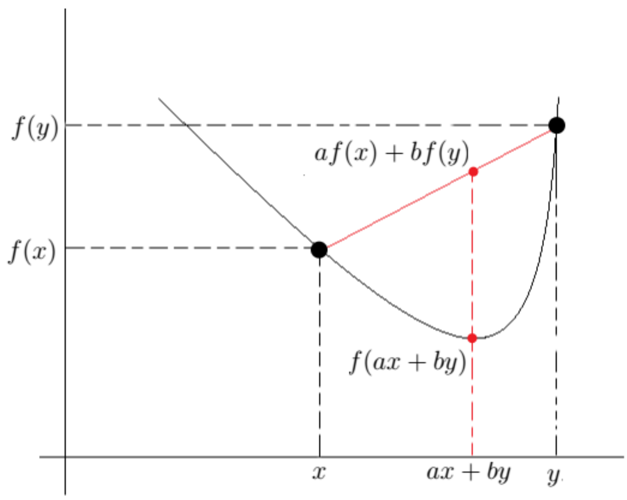

Abbildung 1: Eine konvexe Funktion. Die Strecke zwischen den Punkten $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ ist in rot eingezeichnet. Sie liegt unterhalb des schwarzen Graphen.

Strecke mit den Endpunkten $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ befindet. Umgekehrt liegt im Falle einer konkaven Funktion die Verbindungsstrecke unterhalb des Graphen der Funktion.

Die zweite Bedingung in der Definition von Konvexität verlangt, dass sich der Graph der Funktion f oberhalb der Tangenten an den Graphen (in einem beliebigen Punkt) befindet, siehe Abbildung 2. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(z, f(z))$ ist durch die Gleichung

$$y = f(z) + f'(z)(x - z)$$

gegeben. Man erinnere sich, dass die Ableitung $f'(z)$ von f im Punkt z der Steigung der Tangenten durch diesen Punkt entspricht. Also liegt der Graph von f über der Tangenten durch $(z, f(z))$, falls für alle $x \in I$ gilt, dass

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z).$$

Die Funktion f ist konvex, falls diese Bedingung für alle $z \in I$ gilt. Ähnlich ist f konkav, falls ihr Graph sich immer unterhalb der Tangenten befindet.

Die letzte Bedingung in der Definition ist eine Bedingung an die zweite Ableitung. Hat eine zweite Ableitung immer dasselbe Vorzeichen, so lässt sich dies geometrisch so interpretieren, dass die Krümmung des Graphen der Funktion nie das Vorzeichen wechselt. Das heisst der Graph der Funktion biegt sich immer in dieselbe Richtung. Hat man irgendeine Funktion gegeben, so ist ist dies meistens die am einfachsten zu überprüfende Bedingung.

In der Praxis lautet der Plan wie folgt. Man bestimmt, ob eine Funktion konvex oder konkav ist anhand ihrer zweiten Ableitung. Dann benutzt man die beiden anderen Bedingungen, um nützliche Abschätzungen für die Funktion zu erhalten.

Wir halten nun die gemachten Beobachtungen im nächsten Satz fest. Die Formulierung ist auf Anwendungen in der Olympiade zugeschnitten. Tatsächlich handelt es sich aber dreimal um desselbe Konzept.

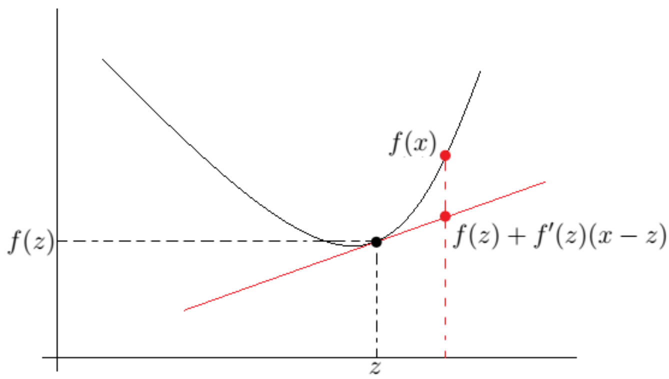

Abbildung 2: Eine konvexe Funktion. Die Tangente an den Graphen der Funktion f durch den Punkt $(z, f(z))$ ist rot eingezeichnet. Der Graph befindet sich oberhalb der Tangente.

Theorem 41. *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine **konvexe** Funktion (i.e. $f'' \geq 0$). Dann gelten die beiden folgenden Ungleichungen:*

1. (Jensen) *Seien $x_1, \ldots, x_n$ Zahlen aus dem Intervall I und $0 \leq \omega_1, \ldots, \omega_n \leq 1$ positive reelle Zahlen, sodass $\omega_1 + \ldots + \omega_n = 1$. Dann gilt*

$$f(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) \leq \omega_1 f(x_1) + \ldots + \omega_n f(x_n).$$

   Gleichheit gilt genau dann wenn $x_i = x_j$ für alle Paare von Indizes (i,j) mit $\omega_i \neq 0$ und $\omega_j \neq 0$, oder falls f eine lineare Funktion ($f'' = 0 \Leftrightarrow f(x) = ax+b$) zwischen $\min\{x_i\}$ und $\max\{x_i\}$ ist.

2. (Tangent line trick) *Seien $x, z \in I$. Dann gilt*

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x-z).$$

   Gleichheit gilt genau dann wenn $x = z$ oder wenn f eine lineare Funktion zwischen x und z ist.

*Wenn f **konkav** ist, dann gelten die umgekehrten Ungleichungen.*

Falls man in der Ungleichung von Jensen alle Gewichte gleich wählt, d.h. $\omega_i = 1/n, \forall i$, so lautet die Ungleichung wie folgt.

Theorem 42 (Spezialfall von Jensen)**.** *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine **konvexe** Funktion. Seien $x_1, \ldots, x_n$ Zahlen aus dem Intervall I. Dann gilt*

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Gleichheit gilt genau dann wenn $x_1 = \ldots = x_n$ oder wenn f linear ist.

Die Ungleichung von Jensen ist eine verallgemeinerte Version der ersten Charakterisierung von Konvexität bzw. Konkavität, genauso wie gewichtetes AM-GM das normale AM-GM verallgemeinert. Der Beweis vom gewichteten AM-GM, welchen wir in voller Allgemeinheit bisher noch nicht gesehen haben, funktioniert mit Jensen. Der Logarithmboxus $f\colon x \mapsto \log x$ ist eine konkave Funktion, da $f''(x) = -1/x^2 < 0$. Dank Jensen gilt daher

$$\log(\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n) \geq \omega_1 \log x_1 + \ldots + \omega_n \log x_n,$$

falls die x_i positiv sind. Die Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ ist steigend, weshalb wir sie auf beide Seiten der vorigen Ungleichung anwenden dürfen. Wir erhalten

$$\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n \geq x_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\omega_n}.$$

Das ist genau die Aussage vom gewichteten AM-GM.

Beispiel 19. *Seien a, b, c die Längen der Seiten eines Dreiecks. Dann gilt*

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}.$$

Lösung. In diesem Beispiel haben wir eine geometrische Bedingung an die Variablen. Wie können wir sie nun in algebraischer Form wiedergeben? Anders gesagt, welche Bedingungen müssen die drei nichtnegativen Zahlen a, b, c erfüllen, damit es ein (vielleicht degeneriertes) Dreieck gibt, dessen Seitenlängen genau diesen drei Zahlen entspricht?

Das Argument ist einfach. Wegen der Symmetrie dürfen wir $a \geq b \geq c \geq 0$ annehmen. Wir beginnen damit, die Seite der Länge a zu zeichnen. Dann zeichnen wir einen Kreis mit Radius b an einem Ende der Seite, und einen Kreis mit Radius c am anderen Ende. Das gesuchte Dreieck existiert genau dann wenn die beiden Kreise sich schneiden. Da $b \leq a$ und $c \leq a$ gelten, schneiden sie sich genau dann wenn $b + c \geq a$. Diese Bedingung wird auch *Dreiecksungleichung* genannt. Insgesamt gilt

$$a, b, c \text{ sind die Seiten eines Dreiecks} \Leftrightarrow a+b \geq c,\ b+c \geq a \text{ und } c+a \geq b.$$

Beachte, dass die drei Ungleichungen der rechten Seite implizieren, dass die Zahlen a, b und c nichtnegativ sind. Falls eine der Ungleichungen eine Gleichheit ist, so ist das Dreieck degeneriert (d.h. die Ecken sind kollinear). Anders gesagt gilt

$$a, b, c \text{ sind die Seiten eines Dreiecks} \Leftrightarrow a+b \geq c,\ b+c \geq a \text{ und } c+a \geq b.$$

In unserer Aufgabe garantieren die drei Dreiecksungleichungen, dass die Wurzeln wohldefiniert sind. Um die geometrische Bedingung loszuwerden, können wir eine Substition benutzen, welche *Ravis Substitution* heisst. Die Substitution geht wie folgt:

$$a, b, c \text{ sind die Seiten eines Dreiecks} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x+y, \\ b = y+z, \\ c = z+x, \end{cases}$$

für drei **nichtnegative** reelle Zahlen x, y, z. Wenn wir das Gleichungssystem auf der rechten Seite nach a, b und c auflösen, dann gilt zum Beispiel $x = 1/2(a-b+c)$. Auf Grund der Dreiecksungleichung ist x also nichtnegativ. Die umgekehrte Implikation ist offensichtlich. Ravis Substitution lässt sich geometrisch sehr schön darstellen, siehe Abbildung 3.

Kehren wir nun zu unserem Beispiel zurück und wenden Ravis Substitution an. Dann müssen wir für alle nichtnegativen reellen Zahlen x, y, z zeigen, dass

$$\sqrt{2}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}) \leq \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}.$$

Die Funktion $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ ist konkav auf den nichtnegativen reellen Zahlen, denn $f''(x) = -1/(4x\sqrt{x}) < 0$. Mit Jensen für zwei Variablen und $\omega_1 = \omega_2 = 1/2$ gilt

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}}.$$

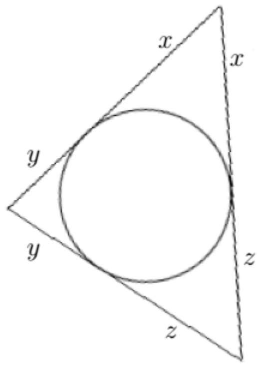

Abbildung 3: In einem Dreieck hat jede Ecke den gleichen Abstand zu den beiden Berührungspunkten der entsprechenden Seiten mit dem Inkreis. Dies folgt zum Beispiel aus dem Potenzsatz.

Aufsummieren dieser Ungleichungen für $(x, y), (y, z)$ und (z, x) zeigt das Gewünschte. Offensichtlich brauchen wir Jensen nicht unbedingt, die Ungleichung oben könnte man nach Quadrieren auch mit AM-GM beweisen. Aber wenn man die Wurzeln durch vierte Wurzeln, oder irgendeine andere auf den nichtnegativen Zahlen konkave Funktion, ersetzt, so kommen wir um eine Anwendung von Jensen nicht herum. $\square$

Beispiel 20 (IMO 2001, Aufgabe 2). *Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Dann gilt*

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

Beweis. Wir schauen uns diese bereits mit Hölder bewiesene Ungleichung nochmals an und zeigen sie diesmal mit Jensen. Die Idee ist, dass die Funktion $f\colon x \mapsto 1/\sqrt{x}$ auf den positiven reellen Zahlen konvex ist, denn ihre zweite Ableitung lautet $f''(x) = 3/(4x^2\sqrt{x}) > 0$.

Wie können wir die Ungleichung von Jensen nun anwenden? Dafür brauchen wir zunächst drei Gewichte mit Summe 1. Da die Ungleichung homogen ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a + b + c = 1$ gilt. Die Variablen selbst werden nun die Rolle der Gewichte übernehmen! Wir erhalten

$$a \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+8bc}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+8ca}} + c \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}}.$$

Also bleibt zu zeigen, dass für positive reelle Zahlen a, b, c mit Summe 1 die Ungleichung

$$1 \geq a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)$$

gilt. Diese Ungleichung ist relativ einfach im Vergleich zur Ursprungsungleichung, dafür ist sie nicht homogen. Dieses Problem lässt sich aber leicht lösen. Wir homogenisieren die Ungleichung durch Multiplikation mit $1 = (a + b + c)^3$. Nach Vereinfachung bleibt

$$a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b \geq 6abc.$$

Diese Ungleichung kennen wir bereits. $\square$

Im letzten Beispiel dieses Skripts benutzen wir den Tangent line trick. Die zu zeigende Ungleichung kann in seltenen Fällen praktisch sein.

Beispiel 21 (Bernoulli)**.** *Seien r und x zwei* ***nichtnegative*** *reelle Zahlen. Dann gilt*

1. $(1+x)^r \geq 1 + rx$, *falls* $r \geq 1$,
2. $(1+x)^r \leq 1 + rx$, *falls* $r \leq 1$.

Gleichheit gilt genau dann wenn $r = 1$, $r = 0$ oder $x = 0$.

Lösung. Die Funktion $f\colon x \mapsto (1+x)^r$ ist auf den nichtnegativen Zahlen konvex falls $r \geq 1$ und konkav falls $r \leq 1$. Wegen $f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2}$ hängt das Vorzeichen von f'' nur vom Verzeichen von $r - 1$ ab. Mit dem Tangent line trick im Punkt $x = 0$ erhalten wir sofort die gewünschte Ungleichung. Im Fall $r \geq 1$ gilt zum Beispiel, wegen $f(0) = 1$ und $f'(0) = r$, dass

$$(1+x)^r \geq 1 + r(x - 0) = 1 + rx.$$

$\square$