MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Inégalités I - Exercices

Actualisé: 1er août 2021
vers. 2.2.1

Note: sans que cela soit explicitement demandé, il est bon pour l'entrainement de chercher tous les cas d'égalité des problèmes proposés.

2 Une histoire de carrés positifs

Les exercices de cette section sont relatifs au deuxième chapitre des notes. Les exercices plus faciles se résolvent essentiellement à l'aide d'AM-GM ou de Cauchy (ou simplement en faisant apparaître des carrés ou en tuant le monstre avec Muirhead). Il n'y a rarement qu'une seule solution! Pour les exercices plus corsés, Muirhead est parfois le moyen le plus efficace et Hölder peut s'avérer utile.

Mise en jambes

2.1 Soient x, y des nombres réels. Montrer que

$$x^2 + y^2 + 2 \geq 2(x + y)$$

et

$$x^2 + y^2 + 5^2 \geq 2(3x + 4y).$$

2.2 Soit a un nombre strictement positif. Montrer que

$$9a + \frac{4}{a} \geq 12.$$

2.3 Soient x et y des nombres réels tels que $x \geq -1$ et $y \geq 1$. Montrer que

$$\sqrt{(x+1)(y-1)} \leq x + y.$$

2.4 Soient a, b, c, d des nombres positifs. Montrer, en utilisant trois méthodes différentes, que

$$\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}.$$

2.5 Soient a, b des nombres réels strictement positifs. Monter que

$$\frac{a + \frac{1}{b} + 1}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a} + b + 1}.$$

2.6 Soient a, b, c des nombres strictement positifs. Montrer, en utilisant trois méthodes différentes, que

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

2.7 Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels tels que $x_1 + \ldots + x_n = 1$. Montrer que

$$\binom{n+1}{2}\left(\frac{a_1^2}{1} + \ldots + \frac{a_n^2}{n}\right) \geq 1.$$

2.8 Soient a, b, c des nombres réels positifs tels que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. Montrer que

$$a + b + c \geq 3.$$

2.9 Soient x, y des nombres réels. Montrer que

$$\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \geq \max\{x+y; x-y; 1+xy; 1-xy\}.$$

Que dire des cas d'égalité ?

Hint: commencez par vous demander ce que cela signifie que d'être plus grand que le max d'une collection d'expressions.

2.10 Ce problème propose d'affiner un peu un des résultats fondamentaux que l'on connait bien. Soient x, y, z des nombres réels. Montrer que

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4} \cdot (x-y)^2.$$

2.11 Soient a, b des nombres strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{a^4 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^4} \leq \frac{1}{ab}.$$

2.12 Soient a, b des nombres strictement positifs et $m \geq 1$ un nombre entier. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}.$$

2.13 Soient $a_1, \dots, a_{13}$ des nombres strictement positifs tels que $a_1 + \ldots + a_{13} = 1$. Trouver la valeur minimale que peut prendre l'expression

$$\frac{1}{a_1} + \frac{9}{a_2} + \ldots + \frac{625}{a_{13}}.$$

Généraliser ensuite pour un nombre n quelconque de variables (à la place du 13).

2.14 Soient x, y, z, w des nombres réels. Montrer que

$$\min\{x - y^2; y - z^2; z - w^2; w - x^2\} \leq \frac{1}{4}.$$

Hint: commencez par vous demander ce que cela signifie que d'être plus grand que le min d'une collection d'expressions.

2.15 (Tour final 2014) Soient a, b, c des nombres positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$\frac{3-b}{a+1} + \frac{a+1}{b+1} + \frac{b+1}{c+1} \geq 4.$$

Avancé

2.16 Soient a, b, c des nombres strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

2.17 Soient $a, b, c \geq 1$ des nombres réels. Montrer que

$$\left(a^2\right)^{bc} \left(b^2\right)^{ca} \left(c^2\right)^{ab} \leq (bc)^{a^2} (ca)^{b^2} (ab)^{c^2}.$$

2.18 Parmi tous les rectangles d'aire fixe A, lequel (ou lesquels) minimise le périmètre ?

2.19 Soit P un polynôme à coefficients réels positifs. Supposer que $P(1) \geq 1$. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{P(x)}.$$

2.20 Soient a, b, c des nombres positifs. Montrer que

$$ab + bc + ca \geq \sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

2.21 Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1.$$

2.22 Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} \geq \max\left\{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}; 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)\right\}.$$

Hint: lorsqu'une inégalité est homogène mais pas symétrique à cause d'une variable, il est toujours possible de sacrifier l'homogénéité pour regagner en symétrie.

2.23 Cet exercice est un peu astucieux, mais l'idée est fondamentale. Il ressemble un peu au problème de l'IMO 2012 vu en exemple. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs tels que $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Trouver la valeur minimale que peut prendre l'expression

$$a_1 + \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt[n]{a_n}.$$

2.24 (Tour final 2016) Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle (pour ceux qui ne sont pas familiers avec cette condition, ils peuvent laisser ce problème de côté pour l'instant). Montrer que

$$\frac{ab+1}{a^2+ac+1} + \frac{bc+1}{b^2+ba+1} + \frac{ca+1}{c^2+cb+1} > \frac{3}{2}.$$

Hint: une somme de trois fractions plus grande que 3/2 ? Mmmh.

2.25 Soient $a \geq b \geq c$ des nombres positifs. Montrer que

$$ab^4 + bc^4 + ca^4 \leq ba^4 + cb^4 + ac^4.$$

Olympiade

2.26 (Pologne 1995) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs tels que

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = n.$$

Trouver la valeur minimale que peut atteindre l'expression

$$a_1 + \frac{a_2^2}{2} + \ldots + \frac{a_n^n}{n}.$$

2.27 (Tour final 2018) Soient a, b, c, d, e des nombres strictement positifs. Trouver la valeur maximale que peut atteindre l'expression

$$\frac{ab + bc + cd + de}{2a^2 + b^2 + 2c^2 + d^2 + 2e^2}.$$

2.28 Soient a, b, c des nombres strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \geq \sqrt{a+b+c}.$$

2.29 Soient $n \geq 1$ un entier naturel et $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des nombres strictement positifs tels que $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 1$. Montrer que

$$n^{a_1} + \ldots + n^{a_{n+1}} \geq \sqrt[\sqrt[n]{a_1}]{n} + \ldots + \sqrt[\sqrt[n]{a_{n+1}}]{n}.$$

2.30 (USA TST 2010) Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2} + \frac{1}{b^5(c+2a)^2} + \frac{1}{c^5(a+2b)^2} \geq \frac{1}{3}.$$

2.31 (Tour final 2012) Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$1 + ab + bc + ca \geq \min\left\{\frac{(a+b)^2}{ab}; \frac{(b+c)^2}{bc}; \frac{(c+a)^2}{ca}\right\}.$$

2.32 (Shortlist 2004) Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $ab + bc + ca = 1$. Montrer que

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a} + 6b} + \sqrt[3]{\frac{1}{b} + 6c} + \sqrt[3]{\frac{1}{c} + 6a} \leq \frac{1}{abc}.$$

3 L'ordre avant le désordre

Cette section propose quelques problèmes liés aux inégalités des suites ordonnées, de Tchébychev et de Schur. A nouveau, les méthodes de résolution ne sont que rarement uniques.

Mise en jambes

3.1 Vérifier les cas d'égalité de Schur à la fin de la preuve.

3.2 Soient a, b, c des nombres positifs. Montrer que

1. $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$,
2. $a^7 + b^7 + c^7 \geq a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3$,
3. $a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$.

Dans quels cas Muirhead s'applique-t-il aussi ?

3.3 Soient a, b, c, d des nombres strictement positifs. Trouver la valeur minimale que peut atteindre l'expression

$$a^{(a-b)}b^{(b-c)}c^{(c-d)}d^{(d-a)}.$$

3.4 Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres strictement positifs. Soit $b_1, \ldots, b_n$ une permutation des a_i. Montrer que

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq a_1 + \ldots + a_n.$$

3.5 Soient x, y, z, w des nombres réels non tous nuls. Montrer que

$$\frac{(x+y+z+w)^2}{x^2+y^2+z^2+w^2} \leq 4.$$

3.6 Montrer que HM $\leq$ AM $\leq$ QM à l'aide de Tchébychev. Que peut-on en déduire au niveau de la validité de ces deux inégalités en fonctions des valeurs des a_i ? Comparer avec ce que l'on avait dit précédemment.

Avancé

3.7 Voici une généralisation de QM-AM. Soient $k \geq 1$ un entier et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres positifs. Montrer que

$$\sqrt[k]{\frac{a_1^k + \ldots + a_n^k}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

La positivité des a_i est-elle nécessaire ?

3.8 Soient $a \geq b \geq c \geq d \geq e \geq f \geq 0$ des nombres positifs. Montrer que

$$(a+b)(c+d)(e+f) \leq 4(ace+bdf) \leq (a+f)(b+e)(c+d).$$

Généraliser votre méthode de résolution pour cet exercice et pour le précédent.

3.9 (IMO 1975) Soient $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ et $y_1 \geq \ldots \geq y_n$ des nombres réels. Soient $z_1, \ldots, z_n$ une permutation des nombres y_i. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2.$$

3.10 Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle. Montrer que

$$2a^2(b+c)+2b^2(c+a)+2c^2(a+b) \geq a^3+b^3+c^3+9abc.$$

3.11 Soient a, b, c des nombres strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

En passant le 2/3 à gauche, on peut voir cette inégalité comme un complément à Nesbitt qui donne une borne supérieure pour la somme des fractions.

Olympiade

3.12 Soient $a_n \geq \ldots \geq a_1 > 0$ des nombres strictement positifs tels que

$$\frac{1}{1+a_1}+\ldots+\frac{1}{1+a_n}=1.$$

Montrer que

$$\sqrt{a_1}+\ldots+\sqrt{a_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right).$$

3.13 Soient a, b, c des nombres strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c} \geq 2.$$

3.14 (IMO Sélection 2012) Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $abc \geq 1$. Monter que

$$\frac{a^4-1}{ab^3+abc+ac^3}+\frac{b^4-1}{bc^3+abc+ba^3}+\frac{c^4-1}{ca^3+abc+cb^3} \geq 0.$$

3.15 (IMO Sélection 2010) Soient a, b, c, d des nombres strictement positifs. Trouver toutes les solutions de l'équation

$$\frac{a^2-bd}{b+2c+d}+\frac{b^2-ca}{c+2d+a}+\frac{c^2-db}{d+2a+b}+\frac{d^2-ac}{a+2b+c}=0.$$

Ce problème est très complet et passablement compliqué. En revanche, la solution contient une étape clef qui peut servir pour d'autres problèmes d'inégalité en quatre variables symétriques par permutation cyclique des variables.

4 Convexe ou concave

Cette section est consacrée à l'emploie de Jensen et du Tangent line trick. De manière générale, on cherche à utiliser des méthodes à saveur analytique.

Mise en jambes

4.1 Démontrer l'inégalité de Bernoulli dans le cas où $r = 1/n$ est l'inverse d'un entier positif à l'aide des méthodes du premier chapitre.

4.2 Soient a, b, c trois nombres strictement positifs. Monter à l'aide de Jensen que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Comment montrer une telle inégalité avec les méthodes précédentes ?

4.3 Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que

$$\frac{a\sqrt{a}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c}}{a+b} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Que se passe-t-il si l'on remplace la condition de départ par $a + b + c \geq 1$?

Avancé

4.4 Soient α, β, γ les angles intérieurs d'un triangle. Monter que

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Pour quels triangles a-t-on égalité ? Que dire de la somme des sinus ?

4.5 Soient $0 < a_1, \ldots, a_n \leq 2$ des nombres positifs. Soit A la moyenne arithmétique des a_i. Montrer que

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(A + \frac{1}{A}\right)^n.$$

4.6 Soient a, b, c des nombres positifs tels que $a + b + c = 3$. Monter à l'aide de Jensen que

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Olympiade

4.7 Soient $a \geq b \geq 1$ deux nombres réels. Montrer que

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{a+1}} \geq \frac{b}{\sqrt{a+b}} + \frac{a}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}}.$$

(Très joli problème non-symétrique et non-homogène!)

4.8 (Shortlist 2017) Soient $a_1, a_2, \ldots a_n, k$ et M des nombres entiers strictement positifs tels que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = M.$$

Si $M > 1$, montrer que

$$P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)$$

n'a pas de racine positive.

4.9 (IMO Sélection 2008) Soient a, b, c des nombres strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{\sqrt{3a+2b+c}} + \frac{b}{\sqrt{3b+2c+a}} + \frac{c}{\sqrt{3c+2a+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a+b+c}.$$