MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Funktionalgleichungen II
Die Cauchy-Funktionalgleichungen

Thomas Huber, Arnaud Maret

Aktualisiert: 1. August 2021
vers. 2.0.0

1 Die Fantastischen Vier

In diesem Skript setzen wir unser Studium der Funktionalgleichungen fort. Wir betrachten eine Familie von vier Gleichungen, und zwar die auf den ersten Blick harmlos aussehenden *Cauchy-Funktionalgleichungen*. In der Praxis treten sie manchmal nach geeigneter Reduktion einer Aufgabe auf. Um die Lösungen dieser Gleichungen zu finden, benötigen wir neue analytische Werkzeuge, insbesondere die Begriffe der *Stetigkeit* von Funktionen und einer *dichten Teilmenge* der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.
In einem ersten Schritt werden wir die klassische Cauchy-Funktionalgleichung untersuchen. Dann können die drei restlichen Gleichungen durch geeignete Substitutionen auf den ersten Fall zurückgeführt werden. Das zu lösende Problem ist dann das Folgende:

Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Im Folgenden sei f eine Lösung dieser Gleichung. Wie immer suchen wir in einem ersten Schritt potentielle Lösungen. Schnell wird klar, dass alle linearen Funktionen $x \mapsto ax$, wobei a eine fixe reelle Zahl ist, die Gleichung lösen. Andere Lösungen sind erstmal nicht zu erkennen.
Nun berechnen wir einige Funktionswerte von f. Recht einfach lässt sich $f(0) = 0$ zeigen. Wir erinnern uns an Beispiel 13 aus dem ersten Skript und erhalten $f(q) = qf(1)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Ähnlich kann man allgemeiner $f(qx) = qf(x)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ zeigen.
An dieser Stelle ist aber schon wieder Schluss. Ohne weitere Annahmen über f lässt sich nichts weiter über die Lösungen der Gleichung herausfinden. Gibt es vielleicht doch noch andere Lösungen als die linearen Funktionen? Tatsächlich lassen sich noch mehr finden, und zwar unendlich viele verschiedene! Und man kann sie nicht einmal mit einer einfachen Formel aufschreiben, so wie wir es von den bisher angetroffenen Funktionen kennen. Wenn man den Graphen einer solchen Lösung in der Ebene $\mathbb{R}^2$ aufzeichnet, wäre die ganze Zeichnung voll mit Punkten des Graphen, trotz der Tatsache, dass jede relle Zahl genau einen Bildpunkt unter dieser Funktion hat. Dies ist das bereits angesprochene Konzept einer dichten Teilmenge. Zudem braucht man das *Auswahlaxiom* für die Konstruktion dieser Funktionen. Für unsere Zwecke ist eher interessant, welche Bedingungen man an f stellen muss, um diese Lösungen auszuschliessen. Am Ende des Kapitels kommen wir aber auf diese wirren Lösungen zurück.

Für den Beweis der Linearität von f auf $\mathbb{Q}$ benutzten wir Induktion. Diese Methode funktioniert aber nicht mehr für $\mathbb{R}$. Um trotzdem Aussagen über f auf ganz $\mathbb{R}$ machen zu können, führen wir neue Bedingungen für f ein. Der erste wichtige Fall ist die Annahme der Monotonie.

Lemma 1.1 *Sei f eine **monotone** Lösung der Cauchy-Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Dann ist f eine lineare Funktion, das heisst es gibt ein a in $\mathbb{R}$ sodass $f(x) = ax$ für alle x in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Falls f eine Lösung der Gleichung ist, dann ist $-f$ auch eine Lösung. Also können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f monoton steigend ist. Wir wissen bereits $f(q) = qf(1)$ für rationale q. Zudem gilt $f(1) \geq f(0) = 0$ wegen der Monotonie von f. Angenommen es gäbe eine reelle Zahl x, sodass $f(x) > xf(1)$ gilt. Falls $f(1) = 0$, so gilt dank der Monotonie von f für jede rationale Zahl $q > x$, dass $0 = f(q) \geq f(x) > 0$. Ein Widerspruch. Falls $f(1) > 0$ wählen wir eine rationale Zahl [1] q mit $f(x)/f(1) > q > x$. Wieder wegen der Monotonie von f gilt dann $qf(1) = f(q) \geq f(x)$. Nach Konstruktion ist aber $f(x) > qf(1)$, und wir haben wieder einen Widerspruch.
Der Fall $f(x) < xf(1)$ ist ähnlich. Zusammen erhalten wir also $f(x) = xf(1)$ für alle reellen x. □

Es lohnt sich, dieses Beweisschema für die Erweiterung der Lösung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ zu verstehen und sich zu merken. Damit können wir zu einem Beispiel fortfahren.

Beispiel 1 (IMO 1992) *Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

Lösung. Sei f eine Lösung der Gleichung. Im ersten Skript (Beispiel 22) haben wir bereits $f(0) = 0$ gezeigt (falls sich der werte Leser nicht mehr daran erinnert, das ist eine gute Übung!). Mit der Substitution $x = 0$ erhalten wir also $f(f(y)) = y$. Mit $y = 0$ folgt zudem $f(x^2) = f(x)^2$. Ein Standardtrick mit der Gleichung $f(f(y)) = y$ ist, alle y in der Funktionalgleichung durch $f(y)$ zu ersetzen. Dann werden nämlich alle vorkommenden $f(y)$ zu y. Wir erhalten dann Folgendes unter Verwendung von $f(x^2) = f(x)^2$:

$$f(x^2 + y) = f(x^2) + f(y).$$

Das riecht schon nach der Cauchy-Funktionalgleichung! Das einzige Problem ist nun, dass x^2 nur nichtnegative reelle Werte annehmen kann. Wir können das wie folgt reformulieren:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \qquad \text{für alle } u \geq 0 \text{ und alle } v \in \mathbb{R}.$$

Um die Bedingung $u \geq 0$ loszuwerden, zeigen wir zuerst, dass f ungerade ist. Sei $v = -u \leq 0$, es folgt $0 = f(0) = f(u) + f(-u)$. Also gilt $f(-u) = -f(u)$ für $u \geq 0$. Wenn wir diese Gleichung umformen und wie $f(-(-u)) = -f(-u)$ lesen, gilt voriges auch für $u \leq 0$. Das heisst f ist auf ganz $\mathbb{R}$ ungerade. Wieder für $u \geq 0$ folgt dann $f((-u)+v) = -f(u+(-v)) = -f(u) - f(-v) = f(-u) + f(v)$. Also gilt $f(u + v) = f(u) + f(v)$ für alle reellen u, v.
Um Lemma 1.1 zu benutzen brauchen wir also nur noch Monotonie von f. Die folgende Methode

[1] Die Existenz von q ist eine Konsequenz der Dichtheit von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. In diesem Fall können wir für beliebige reelle Zahlen $x < y$ eine rationale Zahl dazwischen finden.

lässt sich häufig benutzen, um Monotonie zu zeigen. Daher sollte man sie sich merken. Zuerst impliziert $f(x^2) = f(x)^2$, dass $f(x) \geq 0$ falls $x \geq 0$. Seien nun $a \geq b$ zwei beliebige reelle Zahlen. Dann gilt

$$f(a) = f(b) + f(a-b) \geq f(b),$$

da $a - b \geq 0$. Somit ist f monoton steigend. Also ist f eine lineare Funktion $x \mapsto cx$ und Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung zeigt $c = 1$. $\square$

Eine weitere genügende Bedingung für die Linearität von f ist Stetigkeit in einem Punkt. Obwohl das Konzept der Stetigkeit selten bei Olympiaden auftritt, werden wir es an dieser Stelle doch behandeln.

Definition 1.1 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist *stetig in* x_0 falls $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Das heisst man kann den Graphen von f in der Nähe von $(x_0, f(x_0))$ zeichnen, ohne dabei den Stift abheben zu müssen. Wir nennen f *stetig*, falls f in x_0 stetig ist für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Lemma 1.2 *Sei f eine Lösung der Cauchy-Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$, die **in mindestens einem Punkt** x_0 **stetig ist**. Dann ist f linear, das heisst es gibt ein a in $\mathbb{R}$ sodass $f(x) = ax$ für alle x in $\mathbb{R}$.*

Beweis. Beachte zuerst, dass $f(\epsilon) = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f in x_0 gilt $\lim_{\epsilon\to 0} f(x_0 + \epsilon) = f(x_0)$. Zusammen schliesst man $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = 0 = f(0)$, also ist f stetig in 0. Weiter gilt $f(x+\epsilon) = f(x) + f(\epsilon) \to f(x)$ falls $\epsilon \to 0$, also ist f stetig in jedem x, das heisst f ist stetig. Wir haben also gesehen, dass eine Lösung der Cauchy-Funktionalgleichung, die in einem Punkt stetig ist, tatsächlich überall stetig ist.
Wir wissen nun, dass f stetig ist und $f(q) = qf(1)$ für alle rationalen q gilt. Wie könnte man nun den Graphen einer stetigen Funktion zeichnen, der durch die Punkte $(q, qf(1))$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ verlaufen muss? Intuitiv müssten diese Vorgaben bereits die Linearität von f erzwingen und wir zeigen dies wie folgt.
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\epsilon > 0$. Wähle eine rationale Zahl q_ϵ sodass $x < q_\epsilon < x + \epsilon$. Beachte, dass q_ϵ von ϵ abhängt und falls $\epsilon \to 0$, dann gilt $q_\epsilon \to x$. Damit folgt

$$f(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f(q_\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} q_\epsilon f(1) = xf(1).$$

Also gilt $f(x) = xf(1)$ für alle reellen x. $\square$

Ein allgemeineres Kriterium als Stetigkeit oder Monotonie lässt sich mithilfe der Dichtheit formulieren. Wir beginnen damit, diesen ominösen Begriff zu definieren.

Definition 1.2 Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ heisst *dicht in* $\mathbb{R}^2$ falls jede offene Kreisscheibe in $\mathbb{R}^2$ mit positivem Radius mindestens ein Element von A enthält. Das heisst die Punkte von A sind überall in $\mathbb{R}^2$ verteilt.

Zum Beispiel ist $\mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{R}^2$ genau so wie $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Mit diesem Begriff können wir nun eine vollständige Charakterisierung der Lösungen der Cauchy-Funktionalgleichung vornehmen. Der Beweis ist nicht ganz einfach und ein wenig technisch, aber das Resultat ist eine starke Aussage über die Lösungen.

Satz 1.3 *Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle auf:*

(a) *die Funktion f ist linear,*

(b) *der Graph von f ist dicht in $\mathbb{R}^2$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f nicht linear ist. Dann gibt es zwei reelle Zahlen $x, y \neq 0$, sodass $a := f(x)/x$ und $b := f(y)/y$ zwei verschiedene reelle Zahlen sind. Aus technischen Gründen zeigen wir nicht, dass jede offene Kreisscheibe einen Punkt des Graphen enthält, sondern dass jedes offene Quadrat einen solchen enthält. Dies läuft aber auf dasselbe hinaus. Fixiere also $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ und sei $\epsilon > 0$. Definiere

$$\xi_1 := \frac{v - bu}{a - b}, \qquad \xi_2 := \frac{au - v}{a - b},$$

damit die folgenden Gleichung erfüllt sind:

$$\xi_1 + \xi_2 = u, \qquad a\xi_1 + b\xi_2 = v.$$

Wir wählen rationale Zahlen r_1, r_2 mit

$$|r_1 x - \xi_1| < \min\left\{1, \frac{1}{|a|}\right\} \cdot \frac{\epsilon}{2}, \qquad |r_2 y - \xi_2| < \min\left\{1, \frac{1}{|b|}\right\} \cdot \frac{\epsilon}{2}.$$

Falls $a = 0$, dann nehmen wir r_1, sodass $|r_1 x - \xi_1| < \frac{\epsilon}{2}$ (und analog falls $b = 0$). Wir erhalten dies, indem wir r_1 nahe bei ξ_1/x wählen und genau so für r_2. Nun haben wir einerseits

$$\begin{aligned} |(r_1 x + r_2 y) - u| &= |(r_1 x - \xi_1) + (r_2 y - \xi_2)| \\ &\leq |(r_1 x - \xi_1)| + |(r_2 y - \xi_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Andererseits können wir rationale Faktoren aus f herausziehen und wir erhalten

$$\begin{aligned} |f(r_1 x + r_2 y) - v| &= |(r_1 a x + r_2 b y) - (a\xi_1 + b\xi_2)| \\ &\leq |a||(r_1 x - \xi_1)| + |b||(r_2 y - \xi_2)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Es folgt, dass der Punkt $(r_1 x + r_2 y, f(r_1 x + r_2 y))$ des Graphen von f sich innerhalb des offenen Quadrats mit Zentrum in (u, v) und Seitenlänge 2ϵ befindet. Da (u, v) und $\epsilon > 0$ beliebig waren, enthält jedes noch so kleine Quadrat in $\mathbb{R}^2$ mindestens einen Punkt des Graphen von f. Also liegt der Graph dicht in $\mathbb{R}^2$.

□

Der Satz 1.3 ist ein stärkeres Resultat als die vorigen Lemmas. Falls f eine **monoton steigende** Lösung der Cauchy-Funktionalgleichung ist, dann enthält der Graph von f keine Punkte der beiden Gebiete $(-\infty, x) \times (f(x), \infty)$ und $(x, \infty) \times (-\infty, f(x))$ und ist daher nicht dicht.
Falls f **von unten beschränkt** ist, das heisst es gibt ein $C \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) \geq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann enthält der Graph von f keinen Punkt des Gebiets $\mathbb{R} \times (-\infty, C)$ und ist daher wieder nicht dicht. Daraus und aus der Beschränktheit von unten schliesst man, dass f linear ist und daher $f \equiv 0$. Dasselbe Resultat erhält man für **von oben beschränkte** Lösungen.
Weiter reicht es, dass f **auf einem Intervall I von oben oder unten beschränkt ist**,

wobei I positive Länge hat. Auch in diesem Fall ist der Graph von f nicht dicht, da er keine Punkte des Gebiets $I \times (-\infty, C)$ enthält. Beachte auch, dass jede **stetige** Funktion auf einem kompakten Intervall von $\mathbb{R}$ beschränkt ist.
Wenn wir Beispiel 1 nochmals betrachten, können wir aus der Identität $f(x^2) = f(x)^2$ schliessen, dass f auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ von unten durch 0 beschränkt ist. Also ist f linear nach Satz 1.3.

Nun führen wir die 3 weiteren Cauchy-Funktionalgleichungen ein:

$$
\begin{aligned}
&f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f(x+y) = f(x) + f(y), && (1)\\
&f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}, && f(xy) = f(x)f(y), && (2)\\
&f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, && f(xy) = f(x) + f(y), && (3)\\
&f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, && f(x+y) = f(x)f(y). && (4)
\end{aligned}
$$

Beachte, dass Definitionsmenge und Zielmenge je nach Gleichung unterschiedlich sind. Würde man zum Beispiel in Gleichung (3) Lösungen $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ suchen, liefert die Substitution $x = 0$ sofort die einzige Lösung $f \equiv 0$.
Die drei neuen Gleichungen unterscheiden sich nicht fundamental von der ersten. Angenommen f sei eine Lösung der Gleichung (3), dann ist die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\exp x)$ eine Lösung von (1). Tatsächlich gilt

$$g(x+y) = f(\exp(x+y)) = f(\exp x \cdot \exp y) = f(\exp x) + f(\exp y) = g(x) + g(y).$$

Falls f eine Lösung von (4) ist, dann ist $\log f$ eine Lösung von (1). Und ist f eine Lösung von (2), dann ist $x \mapsto \log(f(\exp x))$ eine Lösung von (1). Die Moral der Geschichte ist, dass falls eine der Gleichungen (2) bis (4) auftritt, dann erlaubt eine Substitution immer die Reduktion auf die additive Cauchy-Funktionalgleichung. Die nicht-pathologischen Lösungen sind also: $x \mapsto x^a$, $a \in \mathbb{R}$, für (2), $x \mapsto a \log x$, $a \in \mathbb{R}$, für (3) und $x \mapsto a^x$ mit $a > 0$ für (4).
Der Satz 1.3 lässt sich auch auf die Gleichungen (2),(3) et (4) anwenden, wobei der Begriff "Linearität" und die Übermenge für die Dichtheit angepasst werden müssen. Zum Beispiel ist eine Lösung von (4) genau dann von der Form $x \mapsto a^x$, wenn ihr Graph nicht dicht in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$ ist.

Wir betrachten ein weiteres Beispiel:

Beispiel 2 *Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$f(x+y) - f(x) - f(y) = (f(x) + x)(f(y) + y).$$

Lösung. Sei f eine Lösung der Gleichung. Hier ist überhaupt nicht klar, welche Funktionen überhaupt diese Gleichung lösen könnten. Mit ein paar Substitutionen kann man einige Werte berechnen, aber konkreten Fortschritt macht man damit nicht. Da weder Injektivität noch Surjektivität weiterhelfen, machen wir eine Substitution.
Die Klammern auf der rechten Seite geben uns die Idee, die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) + x$ einzuführen. Beachte, dass wir trotz der Information, dass das Bild von f in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ liegt, die Zielmenge nicht direkt einschränken können. Die Gleichung vereinfacht sich zu

$$g(x+y) - g(x) - g(y) = g(x)g(y).$$

Das sieht nach einem Mix der additiven und multiplikativen Cauchy-Funktionalgleichungen aus. Die Summanden $g(x), g(y), g(x)g(y)$ geben uns die Idee für die Faktorisierung $g(x+y) = (g(x)+1)(g(y)+1)-1$. Allez ! Die Substitution $h(x) := g(x)+1$ liefert endlich

$$h(x+y) = h(x)h(y).$$

Nun sehen wir, dass unsere Substitutionen gerechtfertigt waren. Wir haben die Gleichung (4) erhalten, müssen aber noch aufpassen! Bis jetzt wissen wir nur, dass h eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist. Es ist also nicht genau dieselbe Aufgabe wie (4).
Glücklicherweise können wir dieses Problem umschiffen. Setzen wir $x = y$ in der Gleichung für h ein, erhalten wir $h(2x) = h(x)^2 \geq 0$ für alle x, also nimmt h nie negative Werte an. Gäbe es ein x_0 mit $h(x_0) = 0$, dann liefert die Substitution $x = x_0$ die Gleichung $h(x_0 + y) = 0$. Dies gilt für alle y und $h \equiv 0$ folgt. Verfolgen wir unsere Substitutionen zurück, so erhalten wir $f(x) = -x-1$, was keine Lösung ist.
Wir suchen also Funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ wie gewünscht. Die klassischen Lösungen sind in diesem Fall $h(x) = a^x$ mit einer positiven Konstante a. Um die exotischen Lösungen auszuschliessen, zeigen wir, dass der Graph von h nicht dicht ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Wir erinnern uns, dass $f(x) \geq 0$. Also gilt $g(x) \geq x$ und somit $h(x) \geq x+1$ für alle reellen Zahlen x. Daher enthält das unendliche Dreieck

$$\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} : y < x+1\},$$

das durch die horizontale Achse und die Gerade $y = x+1$ beschränkt ist, keinen Punkt des Graphen von h. Also ist dieser nicht dicht in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$. Daher haben wir $h(x) = a^x$ für ein $a > 0$ und schlussendlich $f(x) = a^x - x - 1$.
Solche Funktionen erfüllen auch die ursrprüngliche Gleichung. Wir sind aber noch nicht fertig! Wir müssen noch $f(x) \geq 0$ für alle x überprüfen. Das heisst wir müssen alle a finden, für die die Ungleichung $a^x \geq x+1$ für alle x stimmt.
Dafür benutzen wir analytische Methoden: die Graphen von a^x und $x+1$ verlaufen durch den Punkt $(0,1)$. Sie dürfen sich daher nur berühren, falls die Ungleichung stimmen soll. Insbesondere muss die Funktion $l(x) := a^x$ Steigung 1 bei $x = 0$ haben. Da $l'(x) = \log(a) \cdot a^x$, muss $a = e$ (die Eulersche Konstante) gelten. Die Funktion $x \mapsto e^x$ ist konvex und hat in $x = 0$ die Tangente $y = x+1$. Daraus folgt, dass $e^x \geq x+1$ für alle x gilt. Also ist die einzige Lösung unserer Gleichung die Funktion

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

□

1.1 Allgemeine Lösung der additiven Cauchy-Gleichung

Zum Abschluss besprechen wir noch die allgemeine Lösung der additiven Cauchy-Funktionalgleichung. Der Kern der Sache ist die Existenz einer sogenannten $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$. Eine Menge $\mathcal{B}$ von reellen Zahlen heisst $\mathbb{Q}$-*Basis*, falls jede reelle Zahl sich auf eindeutige Art und Weise als endliche rationale Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$ schreiben lässt. Das heisst für alle $x \in \mathbb{R}$ existieren eindeutige $\alpha_b \in \mathbb{Q}$, $b \in \mathcal{B}$, sodass nur eine endliche Anzahl der α_b von null verschieden sind und sodass $x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \alpha_b \cdot b$ gilt. Die Existenz solch einer $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$ folgt aus dem Auswahlaxiom, was zur Folge hat, dass man sie nicht explizit angeben kann. Es ist zumindest nicht schwer zu sehen, dass so eine $\mathbb{Q}$-Basis überabzählbar sein muss.

Sei nun f eine Lösung und $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{R}$. Schreiben wir $x = \sum_{b\in\mathcal{B}} \alpha_b \cdot b$ für eine beliebige reelle Zahl x, so gilt

$$f(x) = f\Big(\sum_{b\in B} \alpha_b \cdot b\Big) = \sum_{b\in B} \alpha_b f(b), \tag{5}$$

wobei wir benutzt haben, dass nur eine endliche Anzahl der α_b nicht null sind und dass diese rationale Zahlen sind. Daraus schliessen wir, dass f vollständig durch die Funktionswerte auf der Menge $\mathcal{B}$ bestimmt ist.
Umgekehrt können wir den Wert von $f(b)$ frei wählen und damit die Funktion f über die Gleichung (5) *definieren*. Dass f damit wirklich wohldefiniert ist, folgt aus der Existenz und der Eindeutigkeit der Repräsentation jedes x als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von Elementen aus $\mathcal{B}$.
Die Menge der Lösungsfunktionen hat also für jede Wahl von $f(b)$ einen Freiheitsgrad, für alle b in $\mathcal{B}$. Der Fall einer linearen Lösungsfunktion entspricht also der Wahl $f(b) = a \cdot b$ für alle $b \in \mathcal{B}$. Dann sind die frei wählbaren Werte $f(b)$ sozusagen alle 'gleichgeschaltet'. Da dies schon die absolute Ausnahme ist, kann man sagen, dass die linearen Lösungen krass in der Unterzahl sind!

2 Funktionalgleichungen vom Typ Cauchy

Manche Aufgaben erinnern stark an die Cauchy-Funktionalgleichungen, benutzen aber trotzdem keine Resultate des vorhergehenden Kapitels. Dann müssen wir die Beweisschemen an unser Problem anpassen. Zum Beispiel kann es vorkommen, dass man ein Argument ähnlich zur Stetigkeit anwenden muss, um unsere Lösung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ zu erweitern. Hier präsentieren wir keine neue Theorie, sondern nur einige Beispiele.

Beispiel 3 *Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy).$$

Lösung. Sei f eine Lösung der Gleichung. Diese Gleichung ist einfach die Summe zweier Cauchy-Funktionalgleichungen. Nach einer kurzen Suche findet man drei Lösungen: die Identität und die Konstanten 2 und 0. Wir beginnen wie immer mit einfachen Substitutionen.
Mit $x = y = 0$ findet man $f(0)^2 = 2f(0)$ und daher $f(0) = 2$ oder $f(0) = 0$. Ist $f(0) = 2$, dann liefert $x = 0$ sofort die konstante Lösung $f \equiv 2$.
Es bleibt, die beiden Lösungen 0 und die Identität zu unterscheiden. Die Annahme $f(1) = 0$ führt zur Lösung $f \equiv 0$ und falls $f(1) \neq 0$, dann lässt sich $f(q) = q$ für alle rationalen q zeigen. Die Details schreiben wir hier nicht auf und bleiben dem Leser als Übung überlassen. Die Lösung benutzt zwar Standardmethoden, ist aber doch nicht ganz einfach.
Bis jetzt haben wir also gezeigt, dass falls f nicht konstant ist, dann ist f die Identität auf $\mathbb{Q}$. Einsetzen von $y = 1$ liefert $f(x + 1) = f(x) + 1$. Induktiv erhält man $f(x + n) = f(x) + n$ für alle reellen Zahlen x und alle ganzen Zahlen n. Mit $y = n$ folgt $f(nx) = nf(x)$ für alle ganzen n. Insbesondere ist f ungerade und es gilt $f(x) = nf(x/n)$. Es folgt $f(qx) = qf(x)$ für alle rationalen q und reellen x. Schlussendlich folgt mit Einsetzen von $y = q$, dass $f(x+q) = f(x)+q$ für alle reellen x und rationalen q gilt. Beachte, dass wir genau in dieser Reihenfolge vorgehen mussten, um die korrekten Schlüsse ziehen zu können. Die Substitution $y = -x$ zeigt noch $f(x^2) = f(x)^2$ und daher $f(x) \geq 0$ für alle reellen $x \geq 0$.
Nun kommen wir zum interessanten Teil: die Erweiterung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$. Wir gehen nach einer

Standardmethode vor, also lohnt es sich diese reproduzieren zu können. Angenommen es gibt ein reelles x, sodass $f(x) < x$. Dann wählen wir eine rationale Zahl q mit $f(x) < q < x$. Dann folgt

$$q > f(x) = f(x-q) + q \geq q,$$

da $x - q \geq 0$. Das ist ein Widerspruch. Im Fall $f(x) > x$ geht man analog vor. Wie gewünscht erhalten wir $f(x) = x$. □

Das nächste Beispiel kann als System von Cauchy-Ungleichungen gesehen werden. Hier ist die Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}_{>0}$ sowohl interessant als auch nicht-trivial.

Beispiel 4 (IMO 2013) *Finde alle Funktionen $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$*

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &\geq f(xy) \\ f(x+y) &\geq f(x) + f(y) \end{aligned}$$

gilt und es ein $a > 1$ mit $f(a) = a$ gibt.

Lösung. Sei f eine Lösung der Aufgabe. Die beiden Ungleichungen stellen sofort klar, dass es sich um ein Problem des Cauchy-Typs handelt. Der Standardansatz ist also, zuerst auf $\mathbb{N}$ zu arbeiten und dann die Lösung auf $\mathbb{Q}_{>0}$ zu erweitern. Natürlich suchen wir wie immer zuerst nach möglichen Lösungen, in diesem Fall scheint nur die Identität möglich. Wir beginnen nun mit einigen Substitutionen.
Einsetzen von $x = y = 1$ ergibt $f(1)^2 \geq f(1)$. Da wir noch nichts über das Vorzeichen von $f(1)$ wissen, hilft uns das nicht wirklich weiter. Welcher andere Wert wäre interessant für die Gleichungen? Natürlich a! Mit $y = a$ folgt $af(x) \geq f(ax)$ und mit $x = 1$ erhält man $f(1) \geq 1$. Induktiv und mit der Hilfe von $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ folgert man $f(n) \geq n$ für alle natürlichen n.
Wie kann man diese Identität auf $\mathbb{Q}_{>0}$ erweitern? Wir versuchen die Standardmethode:

$$f(p) = f\left(\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}\right) \geq qf\left(\frac{p}{q}\right).$$

Also gilt $f(p/q) \leq f(p)/q$, was eher nach der umgekehrten Ungleichung aussieht. Mit $x = \frac{p}{q}$, $y = q$, folgt

$$f\left(\frac{p}{q}\right) f(q) \geq f(p).$$

Die Ungleichung $f(q) \geq q > 0$ erlaubt es uns $f(p/q) \geq f(p)/f(q)$ zu folgern. Insbesondere gilt $f(p/q) > 0$. Diese Bemerkung erscheint hier offensichtlich, aber in einer Prüfungssituation ist es nicht ganz einfach zu sehen, dass die vorige Ungleichung impliziert, dass alle Bilder von f positiv sind.
Im Kontext der Cauchy-Funktionalgleichungen hatten wir schon einmal ausgenutzt, dass die Lösungsfunktion positiv ist. Und zwar haben wir damit gezeigt, dass die Funktion monoton ist! In unserem Fall erhalten wir $f(x+y) \geq f(x) + f(y) > f(x)$, also ist f strikt steigend. Bis jetzt haben wir nur bekannte Standardmethoden benutzt. Nun gehen wir zu dem Teil der Lösung über, in dem wir unsere Erkenntnisse von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}_{>0}$ übertragen. Fixiere $x \in \mathbb{Q}_{>0}$. Die Idee ist, mit dem ganzen Teil $\lfloor x \rfloor$ von x zu arbeiten:

$$f(x) \geq f(\lfloor x \rfloor) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1,$$

wobei wir $x \geq \lfloor x \rfloor > x - 1$ benutzt haben. Wir haben also $f(x) > x - 1$. Auf den ersten Blick ist dies nicht nützlich, da die Ungleichung zu schwach ist. Tatsächlich können wir sie hier doch benutzen. Eine einfache Induktion angewendet auf die ursprüngliche Ungleichung ergibt $f(x)^k \geq f(x^k)$. Also folgt

$$f(x) \geq \sqrt[k]{f(x^k)} > \sqrt[k]{x^k - 1}.$$

für $x > 1$. Zudem konvergiert $\sqrt[k]{x^k - 1} = x\sqrt[k]{1 - x^{-k}}$ gegen x falls $k \to \infty$. Daraus folgt weiter $f(x) \geq x$ für alle $x \geq 1$. Dies ist ein Argument analytischer Art, das bei diesem Typ von Aufgaben auftreten kann.

Das Schwerste ist nun hinter uns. Was kann passieren, falls es ein $x_0 \geq 1$ gibt, das $f(x_0) > x_0$ erfüllt? Die zweite Ungleichung ergibt dann

$$f(x_0 + y) > x_0 + f(y) \geq x_0 + y.$$

Dies bedeutet, dass $f(x) > x$ für alle $x \geq x_0$. Insbesondere muss $x_0 > a > 1$ gelten, da $f(a) = a$. Können wir, ausgehend vom Fixpunkt a, weitere Fixpunkte von f konstruieren? Wir haben

$$a^2 = a \cdot a = f(a) \cdot f(a) \geq f(a^2) \geq a^2.$$

Also gilt $f(a^2) = a^2$ und induktiv folgt $f(a^k) = a^k$. Da $a > 1$ werden die a^k beliebig gross. Also existiert ein k, sodass $x_0 \leq a^k$, was den gewünschten Widerspruch liefert. Wir schliessen $f(x) = x$ für $x \geq 1$.

Was ist, wenn $x < 1$? Sei $x < 1$. Dann ist $1/x > 1$. Also gilt

$$f(x) \cdot 1/x = f(x)f(1/x) \geq f(1) = 1$$

und $f(x) \geq x$ folgt. Weiter gibt es eine ganze Zahl k, sodass $kx > 1$, was zu

$$kx = f(kx) \geq kf(x)$$

führt. Damit erhalten wir $f(x) \leq x$. Schlussendlich gilt $f(x) = x$ und wir sehen, dass die Identität tatsächlich die einzige Lösung ist. $\square$