MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Funktionalgleichungen II - Aufgaben

Aktualisiert: 1. August 2021
vers. 2.1.1

1 Annäherung an Cauchy

Eine erste Auswahl an Aufgaben, um die Theorie der Cauchy-Funktionalgleichungen erstmals in Aufgaben anzuwenden. Obwohl es um Cauchy geht, solltet ihr wie immer mit dem Suchen von Lösungen beginnen und dann weitere Standardmethoden verwenden. Cauchy versteckt sich meist tiefer in der Aufgabe!

Einstieg

1.1 Finde alle Funktionen $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sodass für alle $x, y \in \mathcal{A}$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

für $\mathcal{A} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ und dann $\mathbb{Q}$.

1.2 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y).$$

Anders ausgedrückt suchen wir alle Automorphismen des Körpers $\mathbb{R}$. Dies muss man nicht wissen, aber die Aufgabe ist wichtig.

1.3 (Taiwan) Finde alle stetige Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y).$$

Fortgeschritten

1.4 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

1.5 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(f(m) + f(n)) = m + n.$$

1.6 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(x^3) = f(x)^3.$$

Olympiade

1.7 (IMO Selektion 2007) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}.$$

1.8 (IMO Selektion 2004) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x \neq y \in \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

1.9 (USA TST 2012) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y^2) = f(x) + |yf(y)|.$$

2 Auswahl von Gleichungen aller Arten

In diesem Abschnitt gibt es eine Auswahl von Aufgaben auf IMO Niveau. Die Aufgaben haben nicht unbedingt etwas mit Cauchy zu tun. Vergesst nie die gewohnten Vorgehensweisen, auch für die schwierigsten Funktionalgleichungen.

Einstieg

2.1 (IMO Shortlist 2002) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x).$$

2.2 (Finalrunde 2002) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x-1-f(x)) = f(x) - 1 - x$$

gilt und $\left\{\frac{f(x)}{x} : x \neq 0\right\}$ ist eine endliche Menge.

2.3 (MEMO 2008) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

2.4 (IMO 2010) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor.$$

Fortgeschritten

2.5 (Finalrunde 2016) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+yf(x+y)) = y^2 + f(xf(y+1)).$$

2.6 (IMO Selektion 2013) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f\left(f\left(\frac{x}{y}, y\right), z\right) = xf(1, z)$$

gilt und dass die Funktion $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, die durch $g(x) = f(x, x)$ definiert ist, monoton ist.

2.7 (IMO 2012) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodass für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a + b + c = 0$

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(a)f(c).$$

2.8 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sodass für alle $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Olympiade

2.9 (IMO Shortlist 2010) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

2.10 (IMO 2011) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Zeige, dass $f(x) = 0$ für $x \leq 0$.

2.11 (MEMO 2012) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

2.12 (IMO 2017) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy).$$