MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Équations fonctionnelles II - Exercises

Actualisé: 1er août 2021
vers. 2.1.1

1 Apprivoisement de Cauchy

Un premier choix d'exercices pour intégrer la théorie de Cauchy dans les équations fonctionnelles. Malgré le contexte, comme toujours, commencez par identifier les solutions, puis appliquez les méthodes standards pour retravailler l'équation. Cauchy se cache dans les détails !

Mise en jambes

1.1 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telles que pour tous $x, y \in \mathcal{A}$

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

pour $\mathcal{A} = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q}$.

1.2 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(xy) = f(x)f(y).$$

En langage technique, on cherche à déterminer avec ce problème tous les automorphismes de corps de $\mathbb{R}$. Peu importe la terminologie, c'est un exemple important.

1.3 (Taïwan) Trouver toutes les fonctions continues $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x+y)) = f(x) + f(y).$$

Avancé

1.4 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

1.5 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(f(m) + f(n)) = m + n.$$

1.6 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(x^3) = f(x)^3.$$

Olympiade

1.7 (Sélection IMO 2007) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}.$$

1.8 (Sélection IMO 2004) Trouver toutes les fonctions injectives $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x \neq y \in \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

1.9 (USA TST 2012) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y^2) = f(x) + |yf(y)|.$$

2 Florilège d'équations en tout genre

Ce paragraphe propose un assortiment de problème de niveau IMO. Toutes les équations ne sont pas nécessairement en lien avec la théorie des équations de Cauchy. N'oubliez pas le schéma standard d'approche, même pour les problèmes les plus difficiles.

Mise en jambes

2.1 (IMO Shortlist 2002) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x).$$

2.2 (Tour final 2002) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x-1-f(x)) = f(x) - 1 - x$$

et telles que $\left\{\frac{f(x)}{x} : x \neq 0\right\}$ est un ensemble fini.

2.3 (MEMO 2008) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$xf(x+xy) = xf(x) + f(x^2)f(y).$$

2.4 (IMO 2010) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor.$$

Avancé

2.5 (Tour final 2016) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+yf(x+y)) = y^2 + f(xf(y+1)).$$

2.6 (Sélection IMO 2013) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f\left(f\left(\frac{x}{y}, y\right), z\right) = xf(1, z)$$

et telle que la fonction $g\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ définie par $g(x) = f(x, x)$ est monotone.

2.7 (IMO 2012) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$ avec $a+b+c = 0$

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(a)f(c).$$

2.8 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Olympiade

2.9 (IMO Shortlist 2010) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

2.10 (IMO 2011) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x)).$$

Montrer que $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

2.11 (MEMO 2012) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

2.12 (IMO 2017) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)f(y)) + f(x + y) = f(xy).$$