MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Funktionalgleichungen

Aktualisiert: 1. August 2021
vers. 2.2.1

1 Einstieg

Substitutionen

1.1 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + y.$$

1.2 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xy) + f(y) = f(xf(y)) + y.$$

1.3 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + f(1)) = x + 1.$$

1.4 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xf(y^2)) = xyf(x)^2 f(f(y)).$$

1.5 Zeige, dass es keine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = f(-x) + 1.$$

1.6 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)^2 f(y) = f(x-y).$$

Erste Schritte auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

1.7 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodass $f(0) = 1$ und für alle $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(nf(m) + 1) = f(mn) + f(n).$$

1.8 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodass $f(0) = -1$ und für alle $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(m - 1 + f(n)) = f(m) + f(f(n)).$$

Wie würdet ihr euren Beweis anpassen, wenn $f(0) = -1$ nicht gegeben wäre?

1.9 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

Finde nun alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Was passiert, wenn man $\mathbb{Q}^+$ mit $\mathbb{Q}$ ersetzt als Definitionsmenge von f ?

Ihr bemerkt, nachdem ihr diese Fragen beantwortet habt, dass auch wenn eine Funktionalgleichung eine eindeutige Lösung $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zulässt, sie nicht unbedingt eine eindeutige Lösung haben muss, wenn man die Definitionsmenge $\mathcal{A}$ durch eine kleinere Menge $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ ersetzt.

1.10 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

2 Substitutions(§2.1, §2.3 et §2.4)

Einstieg

2.1 (Slovenien 1999) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

2.2 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + f(x) + y) = y + f(2y).$$

2.3 (Finalrunde 2010) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y).$$

2.4 (Japan 2012) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y).$$

Fortgeschritten

2.5 (Finalrunde 2008) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xy) \leq \frac{xf(y) + yf(x)}{2}.$$

2.6 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$1 + f(f(x)y) = x^4 f(y) + f(y^2 f(y)).$$

2.7 (Schweiz 1999) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

2.8 (Schweiz 2003) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2.$$

Olympiade

2.9 (Albanien TST 2014) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

2.10 (Baltic Way 2014) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x).$$

2.11 (Tschechien 2002) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

2.12 (MEMO 2015) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x^2 y f(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y).$$

3 Gleichungen auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Diese Aufgaben sind im Schnitt ein bisschen schwieriger als die obigen Gleichungen, da sie weniger dem Standard entsprechen. Ihr werdet auch zahlentheoretische Konzepte brauchen. Aber vergesst trotz allem nicht die Grundreflexe !

Einstieg

3.1 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass $f(n)$ eine Quadratzahl ist für alle n in $\mathbb{N}$ und sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn.$$

3.2 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

- $f(m, m) = m$.
- $f(m, n) = f(n, m)$.
- $(m+n)f(m, n) = nf(m, m+n)$.

3.3 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodass für alle $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(m^2 + n) = f(m + n^2).$$

Fortgeschritten

3.4 (Baltic Way 2001) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sodass $f(2001) = 1$ und sodass für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ein Primteiler p von n existiert mit

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

3.5 (MEMO 2016) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m) + f(n) \mid 2(m + n - 1).$$

3.6 (USAJMO 2015) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sodass für jede arithmetische Progression $x < y < z < t$ in $\mathbb{Q}$

$$f(x) + f(t) = f(y) + f(z).$$

3.7 (APMO 2015) Zeige, dass keine Funktion $f\colon \{2, 3, ...\} \to \{2, 3, ...\}$ existiert, sodass für alle $m \neq n$ in $\{2, 3, ...\}$

$$f\left(m^2 n^2\right) = f(m)f(n).$$

Olympiade

3.8 (IMO 1987) Zeige, dass keine Funktion $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ existiert, sodass für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$f(f(n)) = n + 1987.$$

3.9 (Polen 2014) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ sodass für alle $q \in \mathbb{Q}^+$ und jede ganze Zahl $n \geq 1$

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n\text{-mal}}(q)\ldots)) = f(nq).$$

3.10 (USAJMO 2014) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodass für alle $m \neq 0$ in $\mathbb{Z}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$

$$mf(2f(n) - m) + n^2 f(2m - f(n)) = \frac{f(m)^2}{m} + f(nf(n)).$$

3.11 (Frankreich TST 2012) Finde alle natürlichen Zahlen k sodass eine Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Gleichung erfüllt :

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{k\text{-mal}}(n)\ldots)) = n^k.$$

4 Auswahl von Gleichungen aller Art (§3)

Einstieg

4.1 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sodass $f(0) = 1$ und für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n.$$

4.2 (Finalrunde 2015) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$(y + 1)f(x) + f(xf(y) + f(x + y)) = y.$$

4.3 Finde alle injektiven Funktionen $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}.$$

4.4 (MEMO 2009) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

4.5 Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

Fortgeschritten

4.6 (Tschechien 2007) Sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(mf(n)) = nf(m).$$

Finde den minimalen Wert von $f(2007)$.

4.7 (EGMO 2012) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y).$$

4.8 (India 2015) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x + y).$$

4.9 (IMO Selektion 2012) Finde alle surjektiven Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y).$$

4.10 (Tschechien 2004) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(yf(x)).$$

Olympiade

4.11 (Schweiz 2001) Sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Funktion mit $f(1) = 1$ und sodass für alle $x, y \in [0, 1]$

$$f(x) + f(y) \leq f(x + y).$$

Zeige, dass $f(x) \leq 2x$ für alle $x \in [0, 1]$.

4.12 (IMO Selektion 2008) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

4.13 (Tschechien 2011) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}.$$

4.14 (MEMO 2014) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$xf(xy) + xyf(x) \geq f(x^2)f(y) + x^2y.$$

4.15 (Shortlist 2009) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

And last but not least :

4.16 (Bulgarien 2014) Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei $\mathbb{R}^3$ als die Menge aller Punkte im Raum gesehen wird, sodass für jeden nicht-degenerierten Tetraeder $ABCD$ mit Schwerpunkt O

$$f(O) = f(A)f(B)f(C)f(D).$$