MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Équations fonctionnelles

Actualisé: 1er août 2021
vers. 2.2.1

1 Apprivoisement

Substitutions

1.1 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x) + y.$$

1.2 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xy) + f(y) = f(xf(y)) + y.$$

1.3 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + f(1)) = x + 1.$$

1.4 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xf(y^2)) = xyf(x)^2 f(f(y)).$$

1.5 Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f(x) = f(-x) + 1.$$

1.6 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)^2 f(y) = f(x-y).$$

Premiers pas sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

1.7 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $f(0) = 1$ et pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(nf(m) + 1) = f(mn) + f(n).$$

1.8 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $f(0) = -1$ et pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(m - 1 + f(n)) = f(m) + f(f(n)).$$

Comment modifiez-vous votre preuve si l'on omet l'hypothèse $f(0) = -1$?

1.9 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(mn) = f(m) + f(n).$$

Puis, trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}^+$

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Que se passe-t-il si l'on remplace $\mathbb{Q}^+$ par $\mathbb{Q}$ comme ensemble de départ de f ?

Vous comprendrez, après avoir répondu à ces questions, que si une équation fonctionnelle possède une unique solution $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, alors elle n'a pas nécessairement une unique solution si l'on remplace l'ensemble de départ $\mathcal{A}$ par un ensemble plus petit $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$.

1.10 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y).$$

2 Substitutions(§2.1, §2.3 et §2.4)

Mise en jambes

2.1 (Slovénie 1999) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

2.2 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + f(x) + y) = y + f(2y).$$

2.3 (Tour final 2010) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y).$$

2.4 (Japon 2012) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x+y)f(x-y)) = x^2 - yf(y).$$

Avancé

2.5 (Tour final 2008) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xy) \leq \frac{xf(y) + yf(x)}{2}.$$

2.6 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$1 + f(f(x)y) = x^4 f(y) + f(y^2 f(y)).$$

2.7 (Suisse 1999) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

2.8 (Suisse 2003) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f\left((x-y)^2\right) = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2.$$

Olympiade

2.9 (Albanie TST 2014) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

2.10 (Baltic Way 2014) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x).$$

2.11 (Tchéquie 2002) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(xf(y)) = f(xy) + x.$$

2.12 (MEMO 2015) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$f(x^2yf(x)) + f(1) = x^2f(x) + f(y).$$

3 Équations sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$

Ces exercices sont en général plus durs que les équations précédentes, car moins standards. Il va falloir utiliser des concepts de théorie des nombres. Mais surtout, n'oubliez pas les réflexes de base !

Mise en jambes

3.1 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(n)$ est un carré parfait pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + 2mn.$$

3.2 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$

- $f(m, m) = m$.
- $f(m, n) = f(n, m)$.
- $(m+n)f(m, n) = nf(m, m+n)$.

3.3 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$

$$f(m^2 + n) = f(m + n^2).$$

Avancé

3.4 (Baltic Way 2001) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $f(2001) = 1$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, il existe un diviseur premier p de n tel que

$$f(n) = f\left(\frac{n}{p}\right) - f(p).$$

3.5 (MEMO 2016) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m) + f(n) \mid 2(m + n - 1).$$

3.6 (USAJMO 2015) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour toute progression arithmétique $x < y < z < t \in \mathbb{Q}$

$$f(x) + f(t) = f(y) + f(z).$$

3.7 (APMO 2015) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f\colon \{2, 3, \ldots\} \to \{2, 3, \ldots\}$ telles que pour tous $m \neq n \in \{2, 3, \ldots\}$

$$f\left(m^2 n^2\right) = f(m)f(n).$$

Olympiade

3.8 (IMO 1987) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f\colon \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$f(f(n)) = n + 1987.$$

3.9 (Pologne 2014) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ telles que pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$ et tout entier $n \geq 1$

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ fois}}(q)\ldots)) = f(nq).$$

3.10 (USAJMO 2014) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout $m \neq 0 \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$mf(2f(n) - m) + n^2 f(2m - f(n)) = \frac{f(m)^2}{m} + f(nf(n)).$$

3.11 (France TST 2012) Trouver tous les entiers positifs k tels qu'il existe une fonction $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{k \text{ fois}}(n)\ldots)) = n^k.$$

4 Florilège d'équations en tout genre (§3)

Mise en jambes

4.1 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que $f(0) = 1$ et pour tous $n \in \mathbb{Z}$

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n.$$

4.2 (Tour final 2015) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$(y + 1)f(x) + f(xf(y) + f(x + y)) = y.$$

4.3 Trouver toutes les fonctions injectives $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2}.$$

4.4 (MEMO 2009) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(y)) + f(f(x) + f(y)) = yf(x) + f(x + f(y)).$$

4.5 Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

Avancé

4.6 (Tchéquie 2007) Soit $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(mf(n)) = nf(m).$$

Trouver la valeure minimum de $f(2007)$.

4.7 (EGMO 2012) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y).$$

4.8 (India 2015) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^2 + yf(x)) = xf(x + y).$$

4.9 (Sélection IMO 2012) Trouver toutes les fonctions surjectives $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + f(x) + 2f(y)) = f(2x) + f(2y).$$

4.10 (Tchéquie 2004) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$x^2(f(x) + f(y)) = (x + y)f(yf(x)).$$

Olympiade

4.11 (Suisse 2001) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et telle que pour tous $x, y \in [0,1]$

$$f(x) + f(y) \leq f(x + y).$$

Montrer que $f(x) \leq 2x$ pour tout $x \in [0,1]$.

4.12 (Sélection IMO 2008) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

4.13 (Tchéquie 2011) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$f(x)f(y) = f(y)f(xf(y)) + \frac{1}{xy}.$$

4.14 (MEMO 2014) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$xf(xy) + xyf(x) \geq f(x^2)f(y) + x^2y.$$

4.15 (Shortlist 2009) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(x+y)) = f(yf(x)) + x^2.$$

And last but not least :

4.16 (Bulgarie 2014) Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, où $\mathbb{R}^3$ est vu comme l'ensemble des points de l'espace, telles que pour tous tétraèdre non-dégénéré $ABCD$ avec centre de gravité O

$$f(O) = f(A)f(B)f(C)f(D).$$