

Zeit: 4.5 Stunden

Bern

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

9. Mai 2026

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Lord Shen und Po spielen ein Spiel auf einem regelmässigen 2026-Eck. Zuerst schreibt Lord Shen an jeden Eckpunkt eine positive reelle Zahl in rot, sodass das Produkt der 2026 roten Zahlen (die nicht unbedingt verschieden sein müssen) gleich 1 ist.

Anschliessend zeichnet Po Diagonalen zwischen den Eckpunkten des 2026-Ecks, sodass keine zwei Diagonalen sich im innern schneiden und jede so entstandene Region ein Dreieck bildet. Für jedes dieser Dreiecke bildet er das Produkt der drei roten Zahlen an dessen Eckpunkten und schreibt dieses Produkt in grün in das Dreieck.

Bestimme die grösste reelle Zahl c , für die Po sicherstellen kann, dass die Summe der grünen Zahlen mindestens c beträgt, unabhängig davon, welche Zahlen Lord Shen wählt.

2. Seien A, B, X und C Punkte auf einem Kreis ω in dieser Reihenfolge, sodass $AX > AB, AC$ gilt. Seien $P, Q \neq X$ Punkte auf den Geraden XB respektive XC , sodass $AP = AX = AQ$ gilt. Seien M und N die Mittelpunkte der Strecken BC respektive PQ . Sei $S \neq A$ der zweite Schnittpunkt von NA mit ω . Zeige, dass $MN = MS$ gilt.

3. Heidi platziert Ricola auf einem leeren 2026×2026 -Brett. In jedem Schritt wählt Heidi eine Reihe oder Spalte, in welcher die gesamte Anzahl von Ricola ein Vielfaches von 3 ist. Dann wählt sie ein leeres Feld in dieser Reihe oder Spalte und platziert darauf ein einziges Ricola. Falls es keine solche Reihe oder Spalte gibt, hört Heidi auf.

Bestimme die maximale Anzahl an Ricola, die Heidi so platzieren kann.

Zeit: 4.5 Stunden

Bern

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

10. Mai 2026

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Es gibt eine Reihe von $n \geq 3$ Eisbergen, die von links nach rechts mit den ganzen Zahlen 1 bis n angeschrieben sind. Pingu beginnt auf einem der Eisberge zu tanzen und bewegt sich dann gemäss den folgenden Regeln.

Falls Pingu gerade auf dem Eisberg k getanzt hat, macht er anschliessend eine Folge von k Sprüngen, immer zu einem benachbarten Eisberg. Der erste dieser k Sprünge ist immer nach rechts, ausser Pingu befindet sich auf dem Eisberg n , in welchem Fall er nach links zu springen anfängt. Jeder der folgenden $k - 1$ Sprünge ist in der gleichen Richtung wie der vorherige, ausser wenn Pingu sich auf Eisberg 1 oder n befindet. Dann wechselt er die Richtung. Pingu tanzt auf dem Eisberg, den er nach k Sprüngen erreicht.

Pingu wiederholt dieses Hüpfen und Tanzen unendlich oft. Ein Eisberg ist *unvermeidbar*, falls Pingu auf diesem irgendwann tanzen wird, egal auf welchem Eisberg er startet. Bestimme alle $n \geq 3$, für welche es genau einen unvermeidbaren Eisberg gibt.

Beispiel: Falls $n = 8$ gilt und Pingu anfänglich auf Eisberg 3 tanzt, dann sind die nächsten vier Eisberge, auf welchen er tanzt, 6, 4, 8 und 2, in dieser Reihenfolge.

5. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jede positive ganze Zahl n und jedem positiven Teiler a von n , gibt es einen positiven Teiler b von n , sodass gilt:

$$n \mid a + f(b).$$

6. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(f(y) - f(x)) + 4f(xy) = f(f(x) + y^2).$$

Zeit: 4.5 Stunden

Bern

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

23. Mai 2026

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme alle ganzzahlige Folgen $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$, sodass

- jedes a_i eine Zweierpotenz ist, und
- $(2^{a_1} + 1)(2^{a_2} + 1) \dots (2^{a_n} + 1) = 2^{1+a_1+\dots+a_n} - 1$.

8. Sei n eine natürliche Zahl. In Hogwarts gibt es eine magische Tür mit n Hebel, die von 1 bis n beschriftet sind. Der Hebel i kann entweder nach *oben* oder nach *unten* gerichtet sein, und das Bewegen des Hebels von einer zur anderen Ausrichtung kostet 2^{i-1} Gold-Galleonen. Für jede mögliche Kombination von Hebelausrichtungen führt die Tür zu einem anderen Ort. Zu Beginn sind alle Hebel nach unten gerichtet.

Die 2^n Mitglieder von Dumbledore's Armee werden von Voldemort verfolgt und wollen die magische Tür benutzen um sich aufzuteilen, sodass keine zwei Mitglieder zum selben Ort gehen. Was ist die Minimalanzahl an Galleonen, die sie dafür insgesamt ausgeben müssen?

Bemerkung: Dumbledore's Armee darf zu Beginn ein Mitglied durch die Tür schicken, ohne die Hebelausrichtungen zu ändern.

9. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis Ω . Sei t die Tangente an Ω im Punkt A . Sei ω_B der Kreis ausserhalb von ABC , der an t und an AB im Punkt B tangent ist. Analog sei ω_C der Kreis ausserhalb von ABC , der an t und an AC im Punkt C tangent ist. Schliesslich sei P der Schnittpunkt der beiden gemeinsamen inneren Tangenten an ω_B und ω_C , und sei Γ der Umkreis vom Dreieck PBC .

Wenn sich die gemeinsamen Tangenten an Ω und Γ in einem Punkt T schneiden, Beweise, dass A , P und T auf einer Geraden liegen.

*Bemerkung: Eine gemeinsame innere Tangente ℓ an zwei Kreisen ist an beiden Kreisen tangential, und zwar so, dass die beiden Kreise **nicht** auf derselben Seite von ℓ liegen.*

Zeit: 4.5 Stunden

Bern

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

24. Mai 2026

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck. Seien I_B und I_C die Ankreismittelpunkte des Dreiecks ABC gegenüber von B bzw. C . Sei E ein Punkt auf der Geraden BA , sodass $\angle EI_BB = 90^\circ$ gilt. Sei F ein Punkt auf der Geraden CA , sodass $\angle CI_CF = 90^\circ$ gilt. Der Kreis mit Mittelpunkt I_B und Radius I_BE schneidet die Strecke I_BB im Punkt X . Analog schneidet der Kreis mit Mittelpunkt I_C und Radius I_CF die Strecke I_CC im Punkt Y .

Beweise, dass BY senkrecht auf CX steht.

Bemerkung: Der Ankreismittelpunkt des Dreiecks ABC gegenüber dem Eckpunkt B ist der Mittelpunkt des Kreises, der tangential zur Strecke AC , zum Strahl BA jenseits von A und zum Strahl BC jenseits von C liegt. Der Ankreismittelpunkt gegenüber C ist analog definiert.

11. Sei $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ eine Funktion, **die unendlich viele Werte annimmt**. Nehme an, dass für alle nichtnegativen ganzen Zahlen m und n sodass

$$f(m+n) = \max \{f(0), f(1), \dots, f(m+n)\}$$

gilt, auch $f(m+n) = f(m) + f(n)$ hält.

Beweise, dass es positive ganze Zahlen A, B, C und D gibt, sodass für alle nichtnegative n die Gleichung $f(An+B) = Cn+D$ gilt.

12. Für natürliche Zahlen n, k definieren wir $0 \leq f_k(n) < 2^k - 1$ als den Rest der Division von n durch $2^k - 1$. Wir sagen, dass eine natürliche Zahl n ein *Panda* ist, wenn $f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$ für jede natürliche Zahl k gilt.

(a) Beweise, dass es unendlich viele Pandas gibt.

(b) Beweise, dass eine natürliche Zahl M existiert, sodass die Anzahl der Pandas, die kleiner oder gleich M sind, höchstens $\frac{M}{2026^{2026}}$ ist.