

Temps: 4.5 heures

Bern

Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.

9 mai 2026

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

1. Lord Shen et Po jouent à un jeu sur un 2026-gone régulier. Lord Shen écrit à chaque sommet un nombre réel strictement positif en rouge, tel que le produit des 2026 nombres rouges (qui ne sont pas forcément distincts) est égal à 1.

Ensuite, Po trace des segments, qui ne s'intersectent pas, entre les sommets du 2026-gone, de telle manière que les régions ainsi créées soient des triangles. Pour chacun de ces triangles, il calcule le produit des trois nombres rouges à ses sommets, et l'écrit en vert dans le triangle.

Déterminer le plus grand nombre réel c pour lequel Po, peu importe les nombres choisis par Lord Shen, peut garantir que la somme des nombres verts est au moins c .

2. Soient A, B, X et C des points sur le cercle ω dans cet ordre, tels que $AX > AB, AC$. Soient $P, Q \neq X$ des points sur les droites XB et XC respectivement, tels que $AP = AX = AQ$. Soient M et N les milieux des segments BC et PQ respectivement. Si $S \neq A$ est le deuxième point d'intersection de NA avec ω , montrer que $MN = MS$.

3. Heidi place des Ricola sur une grille vide de 2026×2026 cases. À chaque étape, Heidi choisit une ligne ou une colonne dans laquelle le nombre total de Ricola est un multiple de 3, choisit une case vide dans cette ligne ou cette colonne, et y place un seul Ricola. S'il n'existe pas de ligne ou de colonne de ce type, Heidi s'arrête.

Déterminer le nombre maximal de Ricola que Heidi peut placer.

Temps: 4.5 heures

Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.

10 mai 2026

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

4. Il y a une rangée de $n \geq 3$ icebergs, qui sont numérotés de gauche à droite de 1 à n . Pingu commence par danser sur un des icebergs et se déplace ensuite en suivant les règles suivantes.

Si Pingu vient de danser sur l'iceberg k , il fait ensuite une série de k sauts sur des icebergs adjacents. Le premier de ces k sauts est toujours effectué vers la droite, sauf si Pingu se trouve sur l'iceberg n , auquel cas il commence par sauter vers la gauche. Chacun des $k-1$ sauts suivants est effectué dans la même direction, sauf si Pingu se trouve sur l'iceberg 1 ou n . Pingu danse sur l'iceberg qu'il atteint après k sauts.

Pingu continue à danser et sauter de telle manière indéfiniment. Un iceberg est *inévitale* si Pingu va danser dessus à un moment donné, peu importe l'iceberg sur lequel il a commencé à danser. Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ tels qu'il existe exactement un iceberg inévitable.

Exemple : Si $n = 8$, et Pingu danse sur l'iceberg 3 au départ, alors les 4 prochains icebergs sur lesquels il danse sont 6, 4, 8 et 2, dans cet ordre.

5. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier strictement positif n et tout diviseur strictement positif a de n , il existe un diviseur strictement positif b de n tel que

$$n \mid a + f(b).$$

6. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(y) - f(x)) + 4f(xy) = f(f(x) + y^2).$$

Temps: 4.5 heures

Bern

Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.

23 mai 2026

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soit n un entier strictement positif. Déterminer toutes les suites d'entiers $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ telles que

- chaque a_i soit une puissance de deux, et
- $(2^{a_1} + 1)(2^{a_2} + 1) \dots (2^{a_n} + 1) = 2^{1+a_1+\dots+a_n} - 1$.

8. Soit n un entier strictement positif. Il y a à Poudlard une porte magique avec n leviers, qui sont numérotés de 1 à n . Le levier i peut être positionné *vers le haut* ou *vers le bas*, et changer sa position coûte 2^{i-1} Gallions. La porte mène à un endroit différent pour chaque combinaison possible de positions des leviers. Au départ, tous les leviers sont positionnés vers le bas.

Les 2^n membres de l'armée de Dumbledore sont pourchassés par Voldemort, et veulent utiliser la porte magique pour se disperser, de manière à ce que chaque personne voyage à un endroit différent. Quel est le nombre minimal de Gallions qu'ils et elles doivent dépenser au total pour cela ?

Remarque : L'armée de Dumbledore peut initialement faire passer un-e membre par la porte, sans changer les positions des leviers.

9. Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Ω . La tangente à Ω en A est notée t . Soit ω_B le cercle à l'extérieur du triangle ABC , tangent à t et à AB au point B . Similairement, soit ω_C le cercle à l'extérieur du triangle ABC , tangent à t et à AC au point C . Enfin, soit P l'intersection des deux tangentes communes intérieures à ω_B et ω_C , et soit Γ le cercle circonscrit au triangle PBC .

Si les tangentes communes à Ω et Γ s'intersectent au point T , montrer que A, P et T sont colinéaires.

*Remarque : Une tangente commune intérieure ℓ à deux cercles est tangente à chacun d'entre eux, de telle manière que ces deux cercles **ne se trouvent pas** du même côté de ℓ .*

Temps: 4.5 heures

Bern

Difficulté: Les exercices sont classés selon leur difficulté.

24 mai 2026

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit ABC un triangle aigu. Soient I_B et I_C les centres des cercles exinscrits du triangle ABC opposés à B et C respectivement. Soit E un point sur la droite BA tel que $\angle EI_BB = 90^\circ$. Soit F un point sur la droite CA tel que $\angle CI_CF = 90^\circ$. Le cercle de centre I_B et de rayon I_BE intersecte le segment I_BB en X . Le cercle de centre I_C et de rayon I_CF intersecte le segment I_CC en Y .

Montrer que BY est perpendiculaire à CX .

Remarque : Le cercle exinscrit du triangle ABC opposé à B est le cercle tangent au segment AC , à la demi-droite BA au-delà de A , et à la demi-droite BC au-delà de C . Le cercle exinscrit opposé à C est défini similairement.

11. Soit $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ une fonction **qui prend une infinité de valeurs**. Il est donné que, pour tous les entiers non négatifs m et n qui satisfont

$$f(m+n) = \max \{f(0), f(1), \dots, f(m+n)\},$$

on a $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs A, B, C et D tels que, pour tous les entiers non négatifs n , on ait $f(An+B) = Cn+D$.

12. Pour des entiers strictement positifs n et k , on définit $0 \leq f_k(n) < 2^k - 1$ comme étant le reste de la division de n par $2^k - 1$. On dit qu'un entier strictement positif n est un *panda* si $f_k(n) \leq f_{k+1}(n)$ pour tous les entiers strictement positifs k .

(a) Montrer qu'il existe une infinité de pandas.

(b) Montrer qu'il existe un entier strictement positif M tel que le nombre de pandas inférieurs ou égaux à M est au plus $\frac{M}{2026^{2026}}$.