MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO Selektion 2025

Erste Prüfung

Bern
10. Mai 2025

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei k eine positive ganze Zahl. Leo besitzt einen leeren Garten der 45 mal 45 Einheiten gross ist. Er will in jedem der 2025 Einheitsfelder seines Gartens Blumen pflanzen, und darf jeden Morgen ein Feld mit Blumen bepflanzen. Wenn jedoch ein Feld mit Blumen bepflanzt wird, werden am Abend k Tage später, alle noch leeren orthogonal benachbarten Felder von Unkraut verseucht. Ein verseuchtes Feld kann nicht mehr mit Blumen bepflanzt werden.

Finde den kleinstmöglichen Wert von k, sodass Leo seinen ganzen Garten mit Blumen bepflanzen kann.

2. Sei n eine positive ganze Zahl und sei $P(x)$ das Polynom

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit reellen Koeffizienten und $a_0 \neq 0$, dessen n Nullstellen alle paarweise verschiedene positive reelle Zahlen sind. Unter der Annahme $P(x)$ teilt $P(2x)P(x/2)$, zeige

$$\frac{a_{n-1}a_1}{a_0} \geq \frac{9n^2}{8}.$$

3. Seien Ω und ω Kreise, sodass ω im Inneren von Ω liegt. Sei A ein Punkt auf Ω, und B und C die Berührungspunkte der Tangenten an ω durch A. Die Gerade BC schneide Ω in den Punkten X und Y. Seien K, L und M die jeweiligen Mittelpunkte von BC, AX und AY. Der Umkreis von XLK schneide ω in den Punkten P_1 und P_2, wobei P_1 und A auf der gleichen Seite von BC liegen. Der Umkreis von YMK schneide ω in den Punkten Q_1 und Q_2, wobei Q_1 und A auf der gleichen Seite von BC liegen. Die Geraden P_1Q_1 und P_2Q_2 schneiden sich im Punkt R, zeige, dass RA tangential zu Ω ist.

Viel Glück!

IMO Selektion 2025

Zweite Prüfung

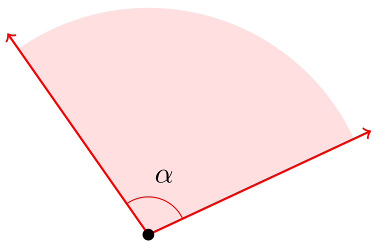
Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Bern
11. Mai 2025

4. Sei ABC ein Dreieck mit $AB < AC$. Sei Ω dessen Umkreis, O dessen Umkreismittelpunkt und I dessen Inkreismittelpunkt. Sei M der Mittelpunkt des Kreisbogens BC auf welchem A nicht liegt. Die Gerade OI schneide Ω in den Punkten E und F, und die Gerade BC schneide ME und MF in den Punkten K beziehungsweise L. Unter der Annahme, dass $IA = IM$, zeige dass $IKML$ ein Rechteck ist.

5. Sei α eine reelle Zahl mit $0 < \alpha < 180$. Für Leo's Geburtstag hat Frieder 2025 Zwerge an beliebigen Punkten in seinem Garten aufgestellt. Keine drei Zwerge sind kollinear, und keine zwei Zwerge sind am gleichen Punkt platziert. Jeder Zwerg hat ein Sichtfeld, dass den Winkel α aufspannt (inklusive dem Rand). Nachdem Frieder die Zwerge platziert hat, will Leo sie so rotieren, dass jeder Zwerg eine unterschiedliche Anzahl anderer Zwerge in seinem Sichtfeld hat.

Bestimme alle Werte von α, für welche Leo dies erreichen kann, egal wie die Zwerge platziert sind.



Ein Beispiel für das Sichtfeld eines Zwerges. Es erstreckt sich unendlich weit zwischen den Randstrahlen.

6. Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Folge von reellen Zahlen, so dass für alle ganzen Zahlen $n \geq 1$ gilt,

$$a_{\lfloor \frac{n}{1} \rfloor} \cdot a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \ldots \cdot a_{\lfloor \frac{n}{n} \rfloor} = 2^{n^2}.$$

Beweise, dass $\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}$ eine ganze Zahl ist, für alle $n \geq 1$.

Viel Glück!

IMO Selektion 2025

Dritte Prüfung

Bern

24. Mai 2025

Zeit: 4.5 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

8. Seien a und b ganze Zahlen mit $a > b \geq 5$. Zeige, dass eine natürliche Zahl k und natürliche Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_k$ mit $c_1 = a$ und $c_k = b$ existieren, sodass $c_i^2 + c_{i+1}^2$ für alle $1 \leq i < k$ eine Quadratzahl ist.

9. Leo's Garten wurde an seine Nichte Bea vererbt, welche zunächst etwas enttäuscht von ihrem Erbe war. Eines Tages erhält sie jedoch einen Brief von Frieder, der besagt, dass ein Schatz unter einem der 2025 Zwerge im Garten vergraben ist. Sie weiss allerdings nicht unter welchem.

Einige Paare von Zwergen sind direkt durch einen Gartenweg verbunden und höchstens drei Wege treffen sich bei einem Zwerg. Bea kann über Gartenwege von jedem Zwerg zu jedem anderen gelangen. Würde man jedoch einen Weg entfernen, so teilen sich die Zwerge immer in zwei separate, untereinander verbundene Gruppen ohne einen Weg dazwischen.

In der Mitte jeden Gartenwegs ist eine Fee, welche Bea sagen kann, in welche Richtung entlang des Pfades sie gehen muss, um zum Schatz zu gelangen. Während zwei Wochen darf Bea jeden Morgen eine Fee um Hilfe bitten. Hat Bea die Position des Schatzes nach der vierzehnten Frage noch nicht gefunden, so verschwindet dieser. Kann Bea den Schatz immer finden, egal wie die Gartenwege angelegt sind?

Viel Glück!

IMO Selektion 2025

Vierte Prüfung

Bern

25. Mai 2025

Zeit: 4.5 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Bestimme alle $n \in \mathbb{N}$ mit mindestens vier positiven Teilern, welche folgende Eigenschaft haben: Für alle paarweise verschiedenen positiven Teiler $a, b \notin \{1, n\}$ gilt, dass $\mathrm{ggT}(a^b + 1, n) > 1$.

11. Sei Γ ein fester Kreis mit zwei festen Punkten A, B auf Γ. Sei $P \notin \{A, B\}$ auf Γ ein variabler Punkt. Sei G der Schwerpunkt vom Dreieck ABP. Die parallele Gerade zur Geraden GP durch B schneidet AP im Punkt C, und die Gerade CG schneidet den Umkreis des Dreiecks ABG ein zweites Mal im Punkt Q. Zeige, dass Q auf einem festen Kreis liegt, wenn P variiert.

12. Bestimme alle Polynome $P \in \mathbb{Z}[x]$, für die ein nichtkonstantes Polynom $Q \in \mathbb{Z}[x]$ existiert, sodass Folgendes gilt:
Für alle ganzen Zahlen a, b gilt $P(b - a) \mid Q(b) - Q(a)$.

Viel Glück!