MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Sélection IMO 2025

## Premier examen

Bern

10 mai 2025

**Temps:** 4.5 heures
**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

**1.** Soit $k$ un entier strictement positif. Léon possède un jardin vide mesurant 45 par 45 unités. Il veut planter des fleurs dans chacun des 2025 carrés de son jardin, et peut planter des fleurs dans un seul carré chaque matin. Cependant, quand des fleurs sont plantées dans un carré, alors $k$ jours plus tard le soir, les carrés encore vides orthogonalement adjacents aux fleurs seront envahis par des mauvaises herbes. Il est impossible de planter des fleurs dans des carrés déjà envahis.

Trouver la valeur minimale de $k$ telle que Léon peut planter des fleurs dans tout son jardin.

**2.** Soit $n$ un entier strictement positif, et soit $P(x)$ le polynôme

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

à coefficients réels et tel que $a_0 \neq 0$, et dont les $n$ racines sont toutes des nombres réels strictement positifs et deux à deux distincts. En supposant que $P(x)$ divise $P(2x)P(x/2)$, prouver que

$$\frac{a_{n-1}a_1}{a_0} \geq \frac{9n^2}{8}.$$

**3.** Soient $\Omega$ un cercle et $\omega$ un cercle à l'intérieur de $\Omega$. Le point $A$ se situe sur $\Omega$, et les tangentes à $\omega$ passant par $A$ touchent $\omega$ en $B$ et $C$. La droite $BC$ intersecte $\Omega$ en deux points $X$ et $Y$. Soient $K, L$ et $M$ les milieux des segments $BC, AX$ et $AY$ respectivement. Le cercle circonscrit au triangle $XLK$ intersecte $\omega$ en deux points $P_1$ et $P_2$, de telle sorte que $P_1$ se trouve du même côté de $BC$ que $A$. Similairement, le cercle circonscrit au triangle $YMK$ intersecte $\omega$ en deux points $Q_1$ et $Q_2$, de telle sorte que $Q_1$ se trouve du même côté de $BC$ que $A$. Si les droites $P_1Q_1$ et $P_2Q_2$ se coupent au point $R$, montrer que la droite $RA$ est tangente à $\Omega$.

Bonne chance!

# Sélection IMO 2025

## Second examen

**Temps:** 4.5 heures

**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.

**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

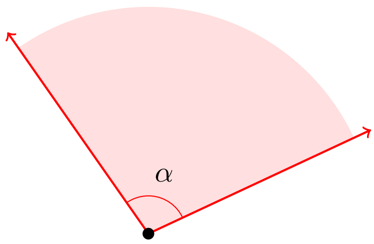
Bern

11 mai 2025

**4.** Soit $ABC$ un triangle tel que $AB < AC$. Soient $\Omega$ son cercle circonscrit, $O$ le centre de $\Omega$, et $I$ le centre du cercle inscrit de $ABC$. Soit $M$ le milieu de l'arc $BC$ qui ne contient pas $A$. La droite $OI$ coupe $\Omega$ en deux points $E$ et $F$, et les droites $ME$ et $MF$ coupent $BC$ en $K$ et $L$ respectivement. En supposant que $IA = IM$, montrer que $IKML$ est un rectangle.

**5.** Soit $\alpha$ un nombre réel tel que $0 < \alpha < 180$. Pour l'anniversaire de Léon, Frieder a mis 2025 nains à des points arbitraires dans son jardin. Trois nains ne sont jamais alignés et deux nains ne sont jamais placés sur le même point. Chaque nain a un champ de vision couvrant $\alpha$ degrés (bords inclus). Après que Frieder a placé les nains, Léon veut les faire pivoter de telle sorte que chaque nain voie ensuite un nombre différent d'autres nains.

Déterminer toutes les valeurs de $\alpha$, telles que Léon peut parvenir à faire cela, peu importe le placement initial des nains.




*Un exemple de champ de vision d'un nain. Il s'étend à l'infini entre les rayons des bords.*

**6.** Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite infinie de nombres réels, satisfaisant, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{\lfloor \frac{n}{1} \rfloor} \cdot a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \cdot \ldots \cdot a_{\lfloor \frac{n}{n} \rfloor} = 2^{n^2}.$$

Prouver que $\frac{a_{n+1}-a_n}{n+1}$ est un entier pour tout $n \geq 1$.

Bonne chance!

# Sélection IMO 2025

## Troisième examen

**Temps:** 4.5 heures
**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

Bern
24 mai 2025

**7.** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfont

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

**8.** Soient $a$ et $b$ des entiers avec $a > b \geq 5$. Montrer qu'il existe un entier strictement positif $k$ et des entiers strictement positifs $c_1, c_2, \ldots, c_k$ avec $c_1 = a$ et $c_k = b$, tels que $c_i^2 + c_{i+1}^2$ est un carré parfait pour tout $1 \leq i < k$.

**9.** Le jardin de Léon a été légué à sa nièce Béa, qui a d'abord été un peu déçue par son héritage. Un jour, elle reçoit une lettre de Frieder lui annonçant qu'un trésor est enterré sous l'un des 2025 nains de jardin, mais elle ne sait pas lequel.

Certaines paires de nains sont directement reliées par un chemin de terre, et au plus trois chemins de terre se rejoignent à chaque nain. Béa peut se rendre de n'importe quel nain à n'importe quel autre nain en marchant le long de certains chemins. En revanche, si l'on supprimait n'importe quel chemin, les nains seraient divisés en exactement deux groupes distincts et connectés, sans aucun moyen de passer d'un groupe à l'autre.

Au milieu de chaque chemin de terre se trouve une fée qui peut indiquer à Béa dans quelle direction elle doit aller pour atteindre le nain qui cache le trésor. Tous les matins, pendant deux semaines, Béa peut demander de l'aide à une fée. Après la quatorzième question, si Béa n'a pas trouvé l'emplacement du trésor, celui-ci disparaîtra. Béa peut-elle toujours trouver le trésor, quel que soit l'arrangement des chemins de terre ?

Bonne chance!

# Sélection IMO 2025

## Quatrième examen

Bern
25 mai 2025

**Temps:** 4.5 heures
**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

**10.** Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ avec au moins quatre diviseurs positifs ayant la propriété suivante : si $a, b \notin \{1, n\}$ sont des diviseurs distincts de $n$, alors $\operatorname{pgcd}(a^b + 1, n) > 1$.

**11.** Soit $\Gamma$ un cercle fixe avec deux points fixes $A, B$ sur $\Gamma$. Pour un point variable $P \notin \{A, B\}$ sur $\Gamma$, soit $G$ le centre de gravité du triangle $ABP$. La parallèle à la droite $GP$ passant par $B$ intersecte $AP$ au point $C$, et la droite $CG$ intersecte le cercle circonscrit au triangle $ABG$ une seconde fois au point $Q$. Montrer que si $P$ varie, le point $Q$ se trouve sur un cercle fixe.

**12.** Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Z}[x]$ pour lesquels il existe un polynôme non constant $Q \in \mathbb{Z}[x]$ tel que pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $P(b - a) \mid Q(b) - Q(a)$.

Bonne chance!