Selezione per le IMO 2024

Primo giorno

Bern
4 maggio 2024

Durata: 4.5 ore
Difficoltà: I problemi sono ordinati in ordine crescente di difficoltà.
Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Sia $n > 1$ un numero intero dispari, e sia p il più piccolo primo che lo divide. Assumendo che ogni divisore primo q di n divida anche n/q, si dimostri che

$$\sqrt{n^{p+1}} \mid 2^{n!} - 1.$$

2. Sia ABC un triangolo con circonferenza circoscritta Γ. Sia $D \neq A$ la seconda intersezione della bisettrice interna dell'angolo $\angle BAC$ con Γ. Definiamo E l'intersezione della retta CD con la perpendicolare a BC passante per B, e ω la circonferenza circoscritta ad ADE. La retta parallela ad AD e passante per E interseca ω in $F \neq E$. Infine, sia T l'intersezione delle tangenti ad ω in A e C. Dimostrare che TF é tangente ad ω.

3. Determinare tutti i polinomi monici P a coefficienti interi tali che, per ogni coppia di interi a e b, esiste un intero c tali che $P(a)P(b) = P(c)$.

Buona fortuna!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Selezione per le IMO 2024

Secondo giorno

Bern
5 maggio 2024

Durata: 4.5 ore
Difficoltà: I problemi sono ordinati in ordine crescente di difficoltà.
Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

4. Sia $a_1, \dots, a_{2^{2024}}$ una sequenza di interi positivi a due a due distinti. Definiamo

$$S_n = \frac{1}{1+a_1} + \frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \dots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

Si determini quante sequenze $a_1, \dots, a_{2^{2024}}$ esistono, tali che $S_{2^i} = \frac{2^i}{2^i+1}$ per ogni $0 \le i \le 2024$.

5. Sia $n \ge 4$ un intero e siano $a_1, \dots, a_n$ e $b_1, \dots, b_n$ due sequenze di interi positivi tale che gli $n+1$ prodotti

$$\begin{gathered} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n, \\ b_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n, \\ b_1 b_2 \cdots a_{n-1} a_n, \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} a_n, \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n, \end{gathered}$$

presi in quest'ordine, formino una progressione aritmetica strettamente crescente. Si determini la più piccola ragione possibile di questa progressione aritmetica in funzione di n.

Nota bene: Una progressione aritmetica è una sequenza della forma $a, a+r, a+2r, \dots, a+kr$ dove a, r e k sono interi ed r è detta ragione della progressione.

6. Sia $n \ge 2$ un intero. Kaloyan ha una striscia $1 \times n^2$ di quadratini di lato unitario, dove sull'i-esimo quadratino è stato scritto il numero i, per tutti gli $1 \le i \le n^2$. Kaloyan taglia la striscia in diversi pezzi, ciascuno dei quali composto da un certo numero di quadratini consecutivi. Dopodiché dispone i pezzi, senza ruotarli o specchiarli, su un quadrato $n \times n$, in modo che il quadrato, sia completamente ricoperto e il quadratino unitario nell'i-esima riga e la j-esima colonna contenga un numero congruo a $i + j$ modulo n.

Determinare il più piccolo numero di pezzi per cui questo è possibile.

Buona fortuna!

Selezione per le IMO 2024

Terzo Giorno

Durata: 4.5 ore
Difficoltà: I problemi sono ordinati in ordine crescente di difficoltà.
Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

Bern
18 maggio 2024

7. Siano $m, n \geq 2$ due interi. Su ogni quadratino unitario di una griglia $m \times n$ é posata una moneta. Inizialmente tutte le monete sono rivolte con la testa verso l'alto. Jérôme esegue ripetutamente la seguente mossa. Per prima cosa, sceglie un sotto-quadrato 2×2 contenuto nella griglia, e poi esegue una delle seguenti operazioni:

- Rovescia tutte le monete nel sotto-quadrato 2×2 scelto, eccetto quella in alto a destra.
- Rovescia tutte le monete nel sotto-quadrato 2×2 scelto, eccetto quella in basso a sinistra.

Determinare tutte le coppie (m, n) per le quali Jérôme può fare in modo che, a un certo punto, tutte le monete mostrino croce.

8. Determinare tutte le funzioni $f \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ tali che

$$x\left(f(x) + f(y)\right) \geq f(y)\left(f(f(x)) + y\right)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

9. Sia ABC un triangolo acutangolo con ortocentro in H, in modo che $AC > AB > BC$. Gli assi di AC e AB intersecano la retta BC in R e S rispettivamente. Siano P e Q punti sulle rette AC e AB rispettivamente, entrambi distinti da A, tali che $AB = BP$ e $AC = CQ$. Dimostrare che le distanze del punto H dalle rette SP e RQ sono uguali.

Buona fortuna!

Selezione per le IMO 2024

Quarto Giorno

Bern

19 maggio 2024

Durata: 4.5 ore

Difficoltà: I problemi sono ordinati in ordine crescente di difficoltà.

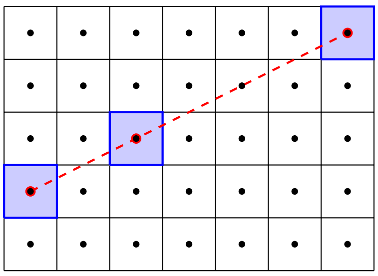
Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

10. Sia ABC un triangolo con $AC > BC$. Sia ω la circonferenza circoscritta al triangolo ABC e sia r il raggio di ω. Sia P un punto sul segmento AC tale che $BC = CP$ e sia S il piede della perpendicolare da P sulla retta AB. Chiamiamo $D \neq B$ la seconda intersezione della retta BP con ω. Sia Q un punto sulla retta SP tale che $PQ = r$ e tale che S, P e Q siano allineati in quest'ordine. Infine, la perpendicolare a CQ passante per A interseca la perpendicolare a DQ per B in E.

Dimostrare che E giace su ω.

11. Siano $m, n \geq 3$ due interi. A Nemo viene data una griglia $m \times n$ di quadratini unitari con inizialmente una moneta su ogni casella. Nemo può ripetutamente eseguire la seguente mossa: per prima cosa, sceglie tre diverse celle allineate e poi sposta una moneta da ciascuna delle caselle più esterne verso la casella centrale. Nemo può eseguire questa mossa solo se le due caselle esterne non sono vuote, mentre la casella centrale può essere vuota.

Al variare di (m, n), determinare il numero massimo di mosse che Nemo può eseguire prima che si blocchi, o dimostrare che si possono eseguire un numero arbitrariamente grande di operazioni.



Un esempio di tre celle con i centri allineati.

Determinare tutte le funzioni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tali che

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{bf(a)}(a+1)\cdots)) = (a+1)f(b)$$

vale per ogni $a, b \in \mathbb{N}$.

12. Buona fortuna!