MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO Selektion 2024

Erste Prüfung

Bern

4. Mai 2024

Zeit: 4.5 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $n > 1$ eine ungerade natürliche Zahl mit kleinstem Primteiler p. Unter der Annahme, dass jeder Primteiler q von n auch n/q teilt, beweise dass gilt:

$$\sqrt{n^{p+1}} \mid 2^{n!} - 1.$$

2. Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis Γ. Sei $D \neq A$ der zweite Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle BAC$ mit Γ. Wir definieren E als Schnittpunkt der Geraden CD mit der Senkrechten zu BC durch B. Sei ω der Umkreis von ADE. Die Gerade parallel zu AD durch E schneidet ω in $F \neq E$. Die zwei Tangenten an Γ durch A und durch C schneiden sich in T. Beweise, dass TF eine Tangente an ω ist.

3. Bestimme alle monischen Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle ganzen Zahlen a und b eine ganze Zahl c existiert, für welche $P(a)P(b) = P(c)$ gilt.

Viel Glück!

IMO Selektion 2024

Zweite Prüfung

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Bern
5. Mai 2024

4. Sei $a_1, \ldots, a_{2^{2024}}$ eine Folge paarweise verschiedener positiven ganzen Zahlen. Definiere

$$S_n = \frac{1}{1+a_1} + \frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

Bestimme die Anzahl Folgen $a_1, \ldots, a_{2^{2024}}$, welche $S_{2^i} = \frac{2^i}{2^i+1}$ für alle $0 \leq i \leq 2024$ erfüllen.

5. Sei $n \geq 4$ eine ganze Zahl und seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ zwei Folgen ganzer Zahlen, sodass die folgenden $n+1$ Produkte

$$\begin{gathered} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n, \\ b_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n, \\ b_1 b_2 \cdots a_{n-1} a_n, \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} a_n, \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n, \end{gathered}$$

in dieser Reihenfolge eine arithmetische Folge bilden. Bestimme die kleinstmögliche gemeinsame Differenz dieser arithmetischen Folge.

Bemerkung: Eine arithmetische Folge ist eine Folge der Form $a, a+r, a+2r, \ldots, a+kr$ für ganze Zahlen a, r und k, wobei r die gemeinsame Differenz genannt wird.

6. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Kaloyan hat einen $1 \times n^2$ Streifen aus Einheitsquadraten, wobei das i-te Einheitsquadrat mit i beschriftet ist, für alle $1 \leq i \leq n^2$. Er schneidet den Streifen in mehrere Stücke, jedes bestehend aus einer Anzahl aufeinanderfolgenden Einheitsquadraten. Danach ordnet er die Stücke, ohne sie zu rotieren oder zu spiegeln, zu einem $n \times n$ Quadrat an, sodass das Einheitsquadrat in der i-ten Reihe und j-ten Spalte mit einer Zahl kongruent zu $i+j$ modulo n beschriftet ist.

Bestimme die kleinstmögliche Anzahl Stücke, für welche dies möglich ist.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO Selektion 2024

Dritte Prüfung

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Bern
18. Mai 2024

7. Seien $m, n \geq 2$ ganze Zahlen. Auf jedem Feld eines $m \times n$ Bretts liegt eine Münze. Anfangs zeigen alle Münzen Kopf. Jérôme führt wiederholt folgende Operation durch. Zuerst wählt er vier Felder aus, die ein 2×2 Quadrat bilden, dann führt er einen der folgenden Schritte aus:

- Alle Münzen im gewählten 2×2 Quadrat umdrehen, ausser die Münze oben rechts.
- Alle Münzen im gewählten 2×2 Quadrat umdrehen, ausser die Münze unten links.

Bestimme alle Paare (m, n) für welche Jérôme irgendwann erreichen kann, dass alle Münzen gleichzeitig Zahl zeigen.

8. Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ sodass

$$x\,(f(x) + f(y)) \geq f(y)\,(f(f(x)) + y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

9. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H, sodass $AC > AB > BC$ gilt. Die Mittelsenkrechten von AC und AB schneiden die Gerade BC in R, respektive S. Seien P und Q Punkte auf den jeweiligen Geraden AC und AB, beide verschieden von A, sodass $AB = BP$ und $AC = CQ$ gilt. Beweise, dass die Distanz von H zu den Geraden SP und RQ gleich ist.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO Selektion 2024

Vierte Prüfung

Bern
19. Mai 2024

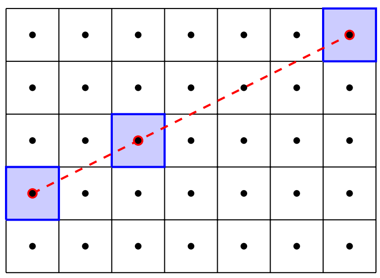
Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei ABC ein Dreieck mit $AC > BC$. Sei ω der Umkreis des Dreiecks ABC und sei r der Radius von ω. Sei P ein Punkt auf der Strecke AC, sodass $BC = CP$ gilt. Sei S die Projektion von P auf der Geraden AB. Sei $D \neq B$ der zweite Schnittpunkt von BP und ω. Sei Q ein Punkt auf SP, sodass $PQ = r$ gilt und sodass S, P und Q in dieser Reihenfolge auf der Geraden liegen. Sei E der Schnittpunkt der Senkrechten zu CQ durch A und der Senkrechten zu DQ durch B.

Beweise dass E auf ω liegt.

11. Seien $m, n \geq 3$ natürliche Zahlen. Veronica hat ein $m \times n$ Brett mit quadratischen Feldern, anfangs mit einem Chip auf jedem Feld. Sie kann wiederholt die folgende Operation ausführen: Sie wählt drei unterschiedliche Felder, deren Mittelpunkte kollinear sind, und verschiebt je einen Chip von den beiden äusseren Feldern auf das mittlere Feld. Sie darf diese Operation nur ausführen, falls auf beiden äusseren Feldern mindestens ein Chip liegt. Das mittlere Feld darf aber leer sein.

Als Funktion von (m, n), bestimme entweder die maximale Anzahl Operationen, die Veronica ausführen kann, bevor sie nicht mehr weitermachen kann oder beweise, dass sie beliebig viele Operationen ausführen kann.



Ein Beispiel dreier Felder, deren Mittelpunkte kollinear sind

12. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{bf(a)}(a+1)\cdots)) = (a+1)f(b)$$

für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt.

Viel Glück!