MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Sélection IMO 2024

## Premier examen

Bern
4 mai 2024

**Temps:** 4.5 heures
**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

**1.** Soit $n > 1$ un entier impair dont le plus petit diviseur premier est $p$. Si $n$ est tel que chacun de ses diviseurs premiers $q$ divise aussi $n/q$, montrer que

$$\sqrt{n^{p+1}} \mid 2^{n!} - 1.$$

**2.** Soit $ABC$ un triangle et $\Gamma$ son cercle circonscrit. Soit $D \neq A$ la deuxième intersection de la bissectrice de $\angle BAC$ avec $\Gamma$. On définit $E$ comme l'intersection de la droite $CD$ avec la perpendiculaire à $BC$ par $B$, et $\omega$ comme le cercle circonscrit à $ADE$. La parallèle à $AD$ passant par $E$ intersecte $\omega$ en $F \neq E$. Enfin, soit $T$ l'intersection des tangentes à $\Gamma$ en $A$ et $C$. Montrer que $TF$ est tangente au cercle $\omega$.

**3.** Déterminer tous les polynômes $P$ unitaires, à coefficients entiers, tels que pour toute paire d'entiers $a$ et $b$, il existe un entier $c$ tel que $P(a)P(b) = P(c)$.

Bonne chance!

# Sélection IMO 2024

## Second examen

Bern

5 mai 2024

**Temps:** 4.5 heures
**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

**4.** Soit $a_1, \ldots, a_{2^{2024}}$ une suite d'entiers strictement positifs deux à deux distincts. On définit

$$S_n = \frac{1}{1+a_1} + \frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \cdots + \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}.$$

Déterminer combien de suites $a_1, \ldots, a_{2^{2024}}$ existent, telles que $S_{2^i} = \frac{2^i}{2^i+1}$ pour tout $0 \leq i \leq 2024$.

**5.** Soit $n \geq 4$ un entier, et soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ deux suites d'entiers strictement positifs, telles que les $n+1$ produits suivants

$$\begin{gathered} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \\ b_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \\ b_1 b_2 \cdots a_{n-1} a_n \\ \vdots \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} a_n \\ b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n \end{gathered}$$

forment dans cet ordre une progression arithmétique strictement croissante. Déterminer la plus petite raison possible que cette progression arithmétique peut avoir.

*Remarque : Une progression arithmétique est une suite de la forme $a, a+r, a+2r, \ldots, a+kr$ où $a$, $r$ et $k$ sont des entiers, et $r$ est appelée sa raison.*

**6.** Soit $n \geq 2$ un entier. Kaloyan possède une bande de papier $1 \times n^2$ constituée de carrés unitaires, où le $i$-ème carré est numéroté $i$ pour tout $1 \leq i \leq n^2$. Il découpe la bande en plusieurs morceaux, de manière à ce que chaque morceau consiste en un ensemble de carrés consécutifs. Il place ensuite les morceaux, sans rotation ou réflection, sur une grille $n \times n$, de sorte qu'elle soit entièrement couverte et que le carré unitaire dans la $i$-ème ligne et dans la $j$-ème colonne contienne un nombre congru à $i+j$ modulo $n$.

Déterminer le nombre minimal de morceaux pour lequel ceci est possible.

Bonne chance!

# Sélection IMO 2024

## Troisième examen

**Temps:** 4.5 heures
**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

Bern
18 mai 2024

**7.** Soient $m, n \geq 2$ deux entiers. Sur chacune des cases unitaires d'une grille $m \times n$ se trouve une pièce. Initialement, toutes les pièces se trouvent côté face. Jérôme effectue de manière répétée l'opération suivante. D'abord, il sélectionne un carré $2 \times 2$ de la grille. Ensuite, il choisit entre :

- Retourner toutes les pièces du carré $2 \times 2$ sauf celle de la case en haut à droite.
- Retourner toutes les pièces du carré $2 \times 2$ sauf celle de la case en bas à gauche.

Déterminer toutes les paires $(m, n)$ pour lesquelles Jérôme peut atteindre la configuration où toutes les pièces se trouvent du côté pile en même temps.

**8.** Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$x\,(f(x) + f(y)) \geq f(y)\,(f(f(x)) + y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

**9.** Soit $ABC$ un triangle aigu tel que $AC > AB > BC$, et soit $H$ son orthocentre. Les médiatrices des segments $AC$ et $AB$ intersectent la droite $BC$ aux points $R$ et $S$ respectivement. Soient $P$ et $Q$ des points sur les droites $AC$ et $AB$ respectivement, tous deux différents de $A$, tels que $AB = BP$ et $AC = CQ$. Montrer que les distances du point $H$ aux droites $SP$ et $RQ$ sont égales.

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Sélection IMO 2024

## Quatrième examen

Bern

19 mai 2024

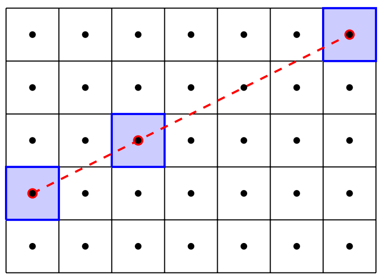
**Temps:** 4.5 heures
**Difficulté:** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points:** Chaque exercice vaut 7 points.

**10.** Soit $ABC$ un triangle avec $AC > BC$. Soit $\omega$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$, et soit $r$ le rayon de $\omega$. Le point $P$ se trouve sur le segment $AC$ et est tel que $BC = CP$. On définit encore $S$ le pied de la perpendiculaire à $AB$ passant par $P$, et $D \neq B$ la deuxième intersection de la droite $BP$ avec $\omega$. Soit $Q$ un point de la droite $SP$ tel que $PQ = r$ et $P$ se trouve entre $S$ et $Q$. Finalement, la droite perpendiculaire à $CQ$ passant par $A$ et la droite perpendiculaire à $DQ$ passant par $B$ s'intersectent au point $E$.

Montrer que $E$ se trouve sur le cercle $\omega$.

**11.** Soient $m, n \geq 3$ deux entiers. Nemo possède une grille $m \times n$ constituée de carrés unitaires avec un jeton sur chaque carré. Nemo effectue de manière répétée l'opération suivante : iel choisit trois carrés unitaires distincts dont les centres sont colinéaires, et déplace un jeton de chacun des deux carrés extérieurs vers le carré du milieu. Iel peut seulement effectuer cette opération si les carrés extérieurs sont non vides, mais il est possible que le carré du milieu soit vide.

Comme fonction de $(m, n)$, déterminer le nombre maximal d'opérations que Nemo peut effectuer avant de ne plus pouvoir continuer, ou montrer qu'iel peut en effectuer un nombre arbitrairement grand.



*Exemple de trois carrés unitaires dont les centres sont colinéaires*

**12.** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$\underbrace{f(f(\cdots f}_{bf(a)}(a+1)\cdots)) = (a+1)f(b)$$

pour tous $a, b \in \mathbb{N}$.

Bonne chance!