MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO Selektion 2023

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Bern
13. Mai 2023
Erste Prüfung

1. In einem Garten stehen 2023 Rosenbüsche in einer Reihe. Jeder Busch trägt entweder rote oder blaue Rosen. Vicky ist auf einem Spaziergang und will einige der Blumen pflücken. Sie startet bei einem Busch ihrer Wahl und pflückt eine Rose, welche sie in ihren Korb legt. Danach spaziert sie der Reihe entlang und pflückt eine einzelne Blume von jedem Busch den sie besucht. Vicky kann gewisse Büsche überspringen, aber sie kann nie zwei benachbarte Büsche überspringen. Sie kann den Garten aber jederzeit verlassen. Seien r und b die Anzahl roter beziehungsweise blauer Blumen, die sie gepflückt hat. Bestimme den maximalen Wert von $|r-b|$ den Vicky unabhängig von der Konfiguration der Büsche erreichen kann.

2. Sei S eine nichtleere Menge natürlichen Zahlen, sodass für jedes $n \in S$ alle positiven Teiler von 2^n+1 auch in S sind. Beweise, dass S eine natürliche Zahl der Form

$$(p_1p_2\dots p_{2023})^{2023}$$

enthält, wobei $p_1, p_2, \dots, p_{2023}$ verschiedene Primzahlen grösser als 2023 sind.

3. Sei ABC ein Dreieck und seien l_1 und l_2 zwei parallele Geraden. Für $i = 1, 2$, nehme an dass l_i die Geraden BC, CA und AB in X_i, Y_i respektive Z_i schneidet. Nehme auch an, dass die Gerade durch X_i senkrecht zu BC, die Gerade durch Y_i senkrecht zu CA und schlussendlich die Gerade durch Z_i senkrecht zu AB ein nicht degeneriertes Dreieck Δ_i definieren. Zeige, dass die Umkreise von Δ_1 und Δ_2 tangential zueinander liegen.

Viel Glück!

IMO Selektion 2023

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Bern
14. Mai 2023
Zweite Prüfung

4. Seien ABC und AMN zwei ähnliche, sich nicht überlappende Dreiecke mit der selben Orientierung sodass $AB = AC$ und $AM = AN$ gilt. Sei O der Umkreismittelpunkt des Dreiecks MAB. Beweise, dass die Punkte O, C, N und A genau dann auf einem Kreis liegen wenn das Dreieck ABC gleichseitig ist.

5. Das Tokio Metrosystem ist eines der effizientesten der Welt. Es gibt eine ungerade natürliche Zahl k, sodass jede Metrolinie durch genau k Stationen führt und jede Station von genau k Metrolinien bedient wird. Man kann von jeder Station zu jeder anderen Station mit einer einzigen Metrolinie gelangen - aber diese Linie ist eindeutig. Auch haben zwei verschiedene Metrolinien stets genau eine Station gemeinsam. David plant eine Exkursion für das IMO Team und möchte eine Menge S von k Stationen besuchen. Er bemerkt dass keine drei Stationen in S auf einer gemeinsamen Metrolinie liegen. Zeige, dass es eine Station ausserhalb von S gibt, die mit jeder Station in S durch eine andere Metrolinie verbunden ist.

6. Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ für welche n unterschiedliche reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und eine reelle Zahl $r > 0$ existieren mit

$$\left\{a_j - a_i \mid 1 \leq i < j \leq n\right\} = \left\{r, r^2, \ldots, r^{\binom{n}{2}}\right\}.$$

Viel Glück!

IMO Selektion 2023

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Bern
27. Mai 2023
Dritte Prüfung

7. Bestimme alle normierten Polynome $P(x) = x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \cdots + a_1x + a_0$ mit reellen Koeffizienten, sodass $a_{2022} = 0$ und $P(1) = 1$ gilt, und sodass alle Nullstellen von P reell und kleiner als 1 sind.

8. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AC > AB$, sei O der Umkreismittelpunkt, und sei D ein Punkt auf der Seite BC. Die Gerade durch D senkrecht zu BC schneidet die Geraden AO, AC und AB jeweils in W, X, respektive Y. Die Umkreise der Dreiecke AXY und ABC schneiden sich zum zweiten Mal in $Z \neq A$. Beweise: Falls $OW = OD$ gilt, dann liegt die Gerade DZ tangential zum Kreis AXY.

9. Sei G ein Graph, dessen Knoten die ganzen Zahlen sind. Nehme an, dass jedes Paar ganzer Zahlen durch einen endlichen Pfad in G verbunden ist. Bezeichne mit $d(x, y)$ die Länge des kürzesten Pfades von x nach y, wobei die Länge eines Pfades die Anzahl darin enthaltenen Kanten ist. Nehme an, dass $d(x, y) \mid x - y$ für alle $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt, und definiere $S(G) = \{d(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Bestimme alle möglichen Mengen $S(G)$.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO Selektion 2023

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Bern
28. Mai 2023
Vierte Prüfung

10. Seien $a, d > 1$ zwei teilerfremde ganze Zahlen. Wir definieren die Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_1 = 1$ und

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k/a & \text{falls } a \text{ ein Teiler von } x_k \text{ ist} \\ x_k + d & \text{andernfalls} \end{cases}$$

für alle $k \geq 1$. Bestimme die grösste nichtnegative ganze Zahl n, sodass a^n mindestens einen Term der Folge teilt, oder beweise, dass kein solches n existiert.

11. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für welche

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Bestimme alle rationalen Zahlen q, sodass es für jede Funktion $f \in \mathcal{F}$ ein $z \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(z) = qz$.

12. Für eine natürliche Zahl m bezeichnen wir mit $[m]$ die Menge $\{1, 2, \ldots, m\}$. Sei n eine natürliche Zahl und sei $\mathcal{S}$ eine nichtleere Menge von Teilmengen von $[n]$. Wir nennen eine Funktion $f\colon [n] \to [n+1]$ *kawaii*, falls es ein $A \in \mathcal{S}$ gibt, so dass für alle $B \in \mathcal{S}$ mit $A \neq B$ die Ungleichung

$$\sum_{a\in A} f(a) > \sum_{b\in B} f(b)$$

gilt. Beweise, dass es mindestens n^n *kawaii* Funktionen gibt, unabhängig von $\mathcal{S}$.

Viel Glück!