MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Sélection IMO 2023

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Bern
13 mai 2023
Premier examen

1. Dans un jardin, 2023 rosiers sont plantés sur une rangée. Chaque rosier contient soit des roses rouges, soit des roses bleues. Vicky se promène et veut cueillir quelques fleurs. Elle commence par le rosier de son choix et y cueille une rose qu'elle ajoute à son panier. Elle continue ensuite à marcher le long de la rangée et cueille une fleur de chaque rosier auquel elle s'arrête. Vicky peut ignorer certains rosiers, mais elle ne peut pas en ignorer deux de suite. Elle peut quitter le jardin quand elle veut. Soient r et b le nombre de roses rouges et bleues qu'elle aura cueilli, respectivement. Déterminer la valeur maximale de $|r-b|$ que Vicky peut atteindre, indépendamment de la configuration des rosiers.

2. Soit S un ensemble non-vide d'entiers strictement positifs tel que pour tout $n \in S$, tous les diviseurs positifs de 2^n+1 sont aussi des éléments de S. Montrer que S contient un entier de la forme

$$(p_1 p_2 \dots p_{2023})^{2023},$$

où $p_1, p_2, \dots, p_{2023}$ sont des nombres premiers distincts, tous plus grands que 2023.

3. Soit ABC un triangle et l_1 et l_2 deux droites parallèles. Pour $i = 1, 2$, supposons que l_i coupe les droites BC, CA et AB en X_i, Y_i et Z_i, respectivement. De plus, supposons que la droite perpendiculaire à BC passant par X_i, la droite perpendiculaire à CA passant par Y_i, et la droite perpendiculaire à AB passant par Z_i, déterminent un triangle non-dégénéré Δ_i. Montrer que les cercles circonscrits à Δ_1 et Δ_2 sont tangents.

Bonne chance!

Sélection IMO 2023

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Bern
14 mai 2023
Second examen

4. Soient ABC et AMN deux triangles semblables de même orientation, qui ne se chevauchent pas, tels que $AB = AC$ et $AM = AN$. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle MAB. Montrer que les points O, C, N et A se trouvent sur un même cercle si et seulement si le triangle ABC est équilatéral.

5. Le système de métro de Tokyo est l'un des plus efficaces du monde. Il existe un entier positif impair k tel que chaque ligne de métro passe par exactement k stations, et que chaque station est desservie par exactement k lignes de métro. Pour n'importe quelles deux stations, il est possible de se rendre de l'une à l'autre en utilisant une seule ligne de métro - mais cette ligne de métro est unique. De plus, deux lignes de métro partagent toujours exactement une station. David prépare une excursion pour l'équipe de l'OIM et souhaite visiter un ensemble S de k stations. Il remarque qu'il n'existe pas trois stations de S sur une ligne de métro commune. Montrer qu'il existe une station qui n'est pas dans S, et qui est reliée à chacune des stations de S par une ligne de métro différente.

6. Déterminer tous les entiers $n \geq 2$ pour lesquels il existe n nombres réels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et un nombre réel $r > 0$ tels que

$$\left\{a_j - a_i \mid 1 \leq i < j \leq n\right\} = \left\{r, r^2, \ldots, r^{\binom{n}{2}}\right\}.$$

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Sélection IMO 2023

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Bern
27 mai 2023
Troisième examen

7. Déterminer tous les polynômes unitaires $P(x) = x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \cdots + a_1 x + a_0$ à coefficients réels tels que $a_{2022} = 0$, $P(1) = 1$ et tels que toutes les racines de P soient réelles et strictement inférieures à 1.

8. Soit ABC un triangle aigu avec $AC > AB$, soit O le centre de son cercle circonscrit, et soit D un point sur le segment BC. La droite perpendiculaire à BC passant par D intersecte les droites AO, AC et AB en W, X et Y, respectivement. Les cercles circonscrits aux triangles AXY et ABC se coupent une deuxième fois en $Z \neq A$. Montrer que si $OW = OD$, alors la droite DZ est tangente au cercle circonscrit au triangle AXY.

9. Soit G un graphe dont les sommets sont les nombres entiers. Supposons que toute paire d'entiers est connectée par un chemin fini dans G. Pour deux entiers x et y, on note $d(x,y)$ la longueur du plus court chemin de x à y, la longueur d'un chemin étant le nombre d'arêtes qu'il contient. Supposons que $d(x,y) \mid x-y$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$ et soit $S(G) = \{d(x,y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer tous les ensembles possibles $S(G)$.

Bonne chance!

Sélection IMO 2023

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Bern
28 mai 2023
Quatrième examen

10. Soient $a, d > 1$ deux entiers premiers entre eux. On définit la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en posant $x_1 = 1$ et

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k/a & \text{si } a \text{ divise } x_k \\ x_k + d & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout $k \geq 1$. Déterminer le plus grand entier positif ou nul n tel que a^n divise au moins un terme de la suite, ou prouver qu'un tel n n'existe pas.

11. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient l'équation

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les nombres rationnels q tels que pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = qz$.

12. Pour un entier strictement positif m, soit $[m]$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, m\}$. Soit n un entier strictement positif et soit $\mathcal{S}$ une collection non-vide de sous-ensembles de $[n]$. Une fonction $f\colon [n] \to [n+1]$ est dite *kawaii* s'il existe $A \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $B \in \mathcal{S}$ qui satisfait $A \neq B$, on a

$$\sum_{a\in A} f(a) > \sum_{b\in B} f(b).$$

Montrer qu'il existe toujours au moins n^n fonctions *kawaii*, indépendamment de $\mathcal{S}$.

Bonne chance!