MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO-Selektion 2022

1. Prüfung
7. Mai 2022

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei n eine positive ganze Zahl. Beweise, dass eine endliche Folge S bestehend aus Nullen und Einsen existiert, sodass für jede ganze Zahl $d \geq 2$ gilt: Wenn S in Basis d interpretiert wird, dann ist die resultierende Zahl ungleich Null und durch n teilbar.

Bemerkung: Die Folge $S = s_k s_{k-1} \cdots s_1 s_0$ interpretiert in der Basis d ist die Zahl $\sum_{i=0}^{k} s_i d^i$.

2. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, sodass der Kreis mit Durchmesser AB tangential zur geraden CD liegt und der Kreis mit Durchmesser CD tangential zur Geraden AB liegt. Zeige, dass die beiden Schnittpunkte der obigen Kreise und der Punkt $AC \cap BD$ kollinear sind.

3. Ein Jäger und ein Hase spielen das folgende Spiel auf den Feldern eines unendlich grossen Schachbretts. Zuerst färbt der Jäger die Felder des Bretts mit endlich vielen Farben. Danach wählt der Hase heimlich ein Feld, in welchem er startet. In jedem Zug meldet der Hase die Farbe seines aktuellen Feldes und geht dann auf ein (durch eine Kante) benachbartes Feld, welches er noch nie besucht hat. Der Jäger gewinnt, falls irgendwann eine dieser beiden Fälle eintrifft:

- Der Jäger weiss mit Sicherheit auf welchem Feld sich der Hase befindet.
- Der Hase hat keinen legalen Zug zur Verfügung.

Bestimme, ob der Jäger eine Gewinnstrategie hat.

Viel Glück!

IMO-Selektion 2022

2. Prüfung

8. Mai 2022

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Auf einem (simplen) Graphen G mit $n \geq 2$ Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und $m \geq 1$ Kanten spielen Joël und Robert das folgende Spiel mit m Münzen:

i) Zuerst weist Joël jedem Knoten v_i einen nichtnegativen ganzzahligen Wert $w_i \in \mathbb{Z}$ zu, sodass gilt $w_1 + \cdots + w_n = m$.

ii) Robert wählt dann eine (möglicherweise leere) Teilmenge der Kanten, platziert bei jeder gewählten Kante ein Münze auf genau einer der beiden Endpunkten und entfernt dann diese Kante. Wenn er fertig ist muss die Anzahl Münzen bei jedem Knoten v_i kleiner gleich w_i sein.

iii) Joël macht dann das gleiche mit den übrigen Kanten und Münzen.

iv) Joël gewinnt, falls die Anzahl Münzen bei jedem Knoten v_i gleich w_i ist.

Bestimme alle Graphen G, sodass Joël eine Gewinnstrategie hat.

5. Seien a, b, c, λ positive reelle Zahlen, mit $\lambda \geq 1/4$. Zeige, dass gilt:

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + \lambda bc + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + \lambda ca + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + \lambda ab + b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{\lambda + 2}}.$$

6. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Beweise, dass falls

$$\frac{n^2 + 4^n + 7^n}{n}$$

eine ganze Zahl ist, dann ist diese durch 11 teilbar.

Viel Glück!

IMO-Selektion 2022

3. Prüfung

28. Mai 2022

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei n eine natürliche Zahl. Finde alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, sodass

$$P(x^2 + x - n^2) = P(x)^2 + P(x)$$

für alle reellen Zahlen x gilt.

8. Johann und Nicole spielen ein Spiel auf der Koordinatenebene. Zuerst zeichnet Johann ein beliebiges Polygon $\mathcal{S}$. Danach darf Nicole $\mathcal{S}$ verschieben, wohin auch immer sie möchte. Johann gewinnt, falls nun ein Punkt mit teilerfremnden ganzzahligen Koordinaten (x, y) im Innern von $\mathcal{S}$ existiert. Ansonsten gewinnt Nicole. Bestimme, wer eine Gewinnstrategie hat.

9. Sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit Umkreis Ω. Die Tangente an Ω durch D schneide die Halbgeraden BA and BC in den Punkten E, respektive F. Sei T ein Punkt im Innern des Dreiecks ABC, sodass TE parallel zu CD und TF parallel zu AD steht. Sei $K \neq D$ ein Punkt auf der Strecke DF, sodass $TD = TK$ gilt. Beweise, dass die Geraden AC, DT und BK sich in einem Punkt schneiden.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO-Selektion 2022

4. Prüfung

29. Mai 2022

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm mit $AC = BC$. Sei P ein beliebiger Punkt auf AB, sodass B zwischen A und P liegt. Der Umkreis von ACD schneide die Strecke PD erneut in Q und der Umkreis von APQ schneide die Strecke PC erneut in R. Beweise, dass sich die Geraden CD, AQ, and BR in einem Punkt schneiden.

11. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Auf jedem Feld eines $n \times n$-Bretts befindet sich eine Münze mit einer 0 auf einer Seite und einer 1 auf der anderen. Anfangs zeigen alle Münzen in der linkesten Spalte mit der 0 nach oben. Ein Zug besteht aus einer der folgenden Operationen:

- Betrachte innerhalb einer beliebigen Zeile das am weitesten rechts liegende Paar benachbarter Münzen, welches unterschiedliche Zahlen zeigt (falls dieses existiert). Drehe diese beiden Münzen sowie alle Münzen rechts davon um.
- Betrachte innerhalb einer beliebigen Spalte das am weitesten oben liegende Paar benachbarter Münzen, welches unterschiedliche Zahlen zeigt (falls dieses existiert). Drehe diese beiden Münzen sowie alle Münzen oberhalb davon um.

Bestimme das kleinstmögliche k, sodass stets eine Folge von Zügen existiert, nach welcher am Ende höchstens k Münzen 1 zeigen.

12. Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass

$$x + f(yf(x) + 1) = xf(x + y) + yf(yf(x))$$

für alle positiven reellen Zahlen x und y gilt.

Viel Glück!