MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Sélection IMO 2022

Premier examen
7 mai 2022

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit n un entier strictement positif. Montrer qu'il existe une suite finie S consistant seulement de zéros et de uns, vérifiant la propriété suivante : pour tout entier strictement positif $d \geq 2$, lorsque S est interprétée comme un nombre en base d, le nombre résultant est non-nul et divisible par n.

Remarque : La suite $S = s_k s_{k-1} \cdots s_1 s_0$ *interprétée en base* d *est le nombre* $\sum_{i=0}^{k} s_i d^i$.

2. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que le cercle de diamètre AB soit tangent à la droite CD, et que le cercle de diamètre CD soit tangent à la droite AB. Montrer que les deux points d'intersection de ces cercles et le point $AC \cap BD$ sont colinéaires.

3. Un chasseur et un lapin jouent au jeu suivant sur les cases d'une grille infinie. Tout d'abord, le chasseur fixe une coloration des cases avec un nombre fini de couleurs. Puis, le lapin choisit secrètement la case sur laquelle il commence. À chaque tour, le lapin annonce la couleur de la case sur laquelle il se trouve au chasseur et se déplace ensuite secrètement sur une case adjacente (qui partage un côté) qu'il n'a pas visitée avant. Le chasseur gagne si à un moment :

- Il peut déterminer avec certitude la case sur laquelle le lapin se trouve, ou si
- Le lapin ne peut plus faire de coup.

Déterminer si le chasseur a une stratégie gagnante.

Bonne chance!

Sélection IMO 2022

Deuxième examen

8 mai 2022

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

4. Etant donné G un graphe (simple) avec $n \geq 2$ sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ et $m \geq 1$ arêtes, Joël et Robert jouent au jeu suivant avec m pièces :

i) Joël attribue d'abord à chaque sommet v_i un entier $w_i \geq 0$ tel que $w_1 + \cdots + w_n = m$.

ii) Robert choisit ensuite un sous-ensemble d'arêtes (possiblement vide), et pour chaque arête choisie, il place une pièce sur exactement une des extrémités, et enlève cette arête du graphe. Quand il a terminé, le nombre de pièces sur chaque sommet v_i ne doit pas être plus grand que w_i.

iii) Joël effectue ensuite la même procédure sur le reste des arêtes.

iv) Joël gagne si le nombre de pièces sur chaque arête v_i est égal à w_i.

Déterminer tous les graphe G pour lesquels Joël a une stratégie gagnante.

5. Soient a, b, c, λ des nombres réels strictement positifs avec $\lambda \geq 1/4$. Prouver que

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + \lambda bc + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + \lambda ca + a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + \lambda ab + b^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{\lambda + 2}}.$$

6. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Prouver que si

$$\frac{n^2 + 4^n + 7^n}{n}$$

est un entier, alors il est divisible par 11.

Bonne chance!

Sélection IMO 2022

Troisième examen

28 mai 2022

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soit n un nombre entier strictement positif. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que

$$P(x^2 + x - n^2) = P(x)^2 + P(x)$$

pour tout nombre réel x.

8. Johann et Nicole jouent à un jeu sur le plan. D'abord, Johann dessine un certain polygone $\mathcal{S}$ et ensuite, Nicole peut translater $\mathcal{S}$ où elle veut. Johann gagne s'il existe un point (x, y) à l'intérieur de $\mathcal{S}$, où x et y sont des entiers premiers entre eux. Sinon, Nicole gagne. Déterminer qui a une stratégie gagnante.

9. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Ω. La tangente à Ω au point D intersecte les demi-droites BA et BC aux points E et F, respectivement. Un point T est choisi à l'intérieur du triangle ABC tel que TE est parallèle à CD et TF est parallèle à AD. Soit $K \neq D$ un point sur le segment DF tel que $TD = TK$. Montrer que les droites AC, DT et BK s'intersectent en un point.

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Sélection IMO 2022

Quatrième examen
29 mai 2022

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BC$. Un point P est choisi sur la droite AB tel que B se trouve entre A et P. Le cercle circonscrit au triangle ACD intersecte une deuxième fois le segment PD au point Q, et le cercle circonscrit au triangle APQ intersecte une deuxième fois le segment PC au point R. Montrer que les droites CD, AQ, et BR s'intersectent en un point.

11. Soit $n \geq 2$ un entier naturel. Chacune des cases d'un échiquier $n \times n$ contient une pièce avec un 0 sur un côté et un 1 sur l'autre. Au départ, toutes les pièces sur la colonne la plus à gauche affichent un 0. Un coup consiste à effectuer l'une des choses suivantes :

- Sur n'importe quelle ligne, considérer les pièces voisines les plus à droite affichant des valeurs différentes (si elles existent) et retourner ces deux pièces ainsi que toutes les pièces à leur droite.
- Sur n'importe quelle colonne, considérer les pièces voisines les plus en haut affichant des valeurs différentes (si elles existent) et retourner ces deux pièces ainsi que toutes les pièces au-dessus.

Trouver la valeur minimale de k telle qu'il existe toujours une suite de coups résultant en au plus k pièces affichant un 1.

12. Soit $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$x + f(yf(x) + 1) = xf(x + y) + yf(yf(x))$$

pour tous nombres réels strictement positifs x et y.

Bonne chance!