IMO-Selektion 2021

1. Prüfung

8. Mai 2021

MATHEMATICAL. OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = 90°$, Umkreismittelpunkt O und Inkreismittelpunkt I. Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneidet den Umkreis von ABC in A und P. Sei Q die Projektion von P auf AB, und R die Projektion von I auf PQ. Beweise, dass RO die Strecke CI halbiert.

2. Für jede Primzahl p gibt es irgendwo im Universum ein Königreich mit p Inseln, nummeriert von 1 bis p, mit einer Brücke zwischen jedem Paar von Inseln. Wenn Jana ein Königreich besucht, muss sie wegen Coronavirus-Einschränkungen die folgende Regel befolgen: Direkt nachdem sie die Insel m besucht, darf sie nur zu Insel n wechseln, falls

$$p \mid (m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$$

gilt. Zeige, dass es unendlich viele Königreiche gibt, in denen Jana nicht alle Inseln besuchen kann.

3. Sei p eine ungerade Primzahl. Arnaud hat $N \geq 1$ Tücher an einer Wäscheleine aufgehängt, wobei jedes Tuch entweder violett oder gelb ist. Nun berechnet er für jedes $1 \leq n \leq N$, welcher Bruchteil der ersten n Tücher gelb ist, und notiert diese N Brüche in gekürzter Form auf einem Blatt Papier. Julia findet das Blatt Papier am nächsten Tag und stellt fest, dass alle Brüche $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}$ darauf vorkommen. Beweise, dass

$$N \geq \frac{p^3 - p}{4}.$$

Viel Glück!

IMO-Selektion 2021

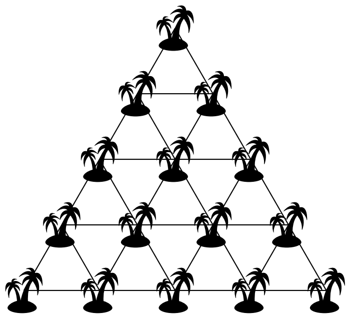
2. Prüfung

9. Mai 2021

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei n eine natürliche Zahl. Die Inseln des MO-Archipels sind in einem regelmässigen Raster aus gleichseitigen Dreiecken mit Einheitslänge angeordnet, sodass sie ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge n bilden. Der allseits beliebte Gouverneur Henning wurde beauftragt, zwischen jedem Paar von Inseln mit Distanz 1 eine Brücke zu bauen. Um dies zu tun, wählt Henning für jede Insel i zwei reelle Zahlen x_i und y_i welche $x_i^2 + y_i^2 = 1$ erfüllen. Der Preis einer Brücke zwischen den Inseln i und j ist nun durch $1 + x_i x_j + y_i y_j$ gegeben. Bestimme den minimalen Geldbetrag, der nötig ist um alle Brücken zu bauen.

Bemerkung: Unten ist eine Karte des MO-Archipels für den Fall $n = 4$ abgebildet.



5. Sei n eine natürliche Zahl. Einige der Felder eines $3n \times 3n$-Bretts wurden markiert. Für jedes markierte Feld T sei $\ell(T)$ die Anzahl markierter Felder in der gleichen Zeile links von T und $u(T)$ die Anzahl markierter Felder in der gleichen Spalte unterhalb von T. Finde die grösstmögliche Anzahl markierter Felder, sodass $\ell(T) + u(T)$ für jedes markierte Feld T gerade ist.

6. Wir nennen eine natürliche Zahl *dusselig*, wenn die Summe ihrer positiven Teiler eine Quadratzahl ist. Beweise, dass es unendlich viele dusselige Zahlen gibt.

Viel Glück!

IMO-Selektion 2021

3. Prüfung

22. Mai 2021

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei n eine natürliche Zahl. Wir nennen eine Folge von natürlichen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *zahm*, falls für die Folge gilt:

$$1 \cdot a_1 \leq 2 \cdot a_2 \leq \ldots \leq n \cdot a_n.$$

Bestimme die Anzahl zahmer Permutationen von $1, 2, \ldots, n$

8. Sei ABC ein Dreieck mit $BC = CA$. Sei D ein Punkt innerhalb der Strecke AB, so dass $AD < DB$. Seien P und Q zwei Punkte innerhalb der Strecken BC resp. CA, sodass $\angle DPB = \angle DQA = 90°$. Sei E der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von PQ und der Strecke CQ. Die Umkreise von ABC und PQC schneiden sich in C und F. Angenommen, dass P, E, F kollinear sind, zeige dass $\angle ACB = 90°$ gilt.

9. Finde alle Polynome P mit reellen Koeffizienten ohne mehrfache Nullstellen, sodass für alle komplexen Zahlen z die Gleichung $zP(z) = 1$ genau dann erfüllt ist, wenn $P(z-1)P(z+1) = 0$ gilt.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO-Selektion 2021

4. Prüfung

23. Mai 2021

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Zeige, dass es unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, sodass

$$n^2 + 1 \mid n!$$

gilt.

11. Finde alle geraden Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für welche eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$g(f(x) + y) = g(x) + g(y) + yf(x + f(x)).$$

Bemerkung: eine gerade Funktion ist eine Funktion, für welche $g(x) = g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

12. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit dem Inkreismittelpunkt I. Sei A_1 der Schnittpunkt von AI und BC, und sei C_1 der Schnittpunkt von CI und AB. Seien weiter M und N die Mittelpunkte von AI resp. CI. In den Dreiecken AC_1I und A_1CI wählen wir jeweils die Punkte K bezw. L, sodass $\angle AKI = \angle CLI = \angle AIC$, $\angle AKM = \angle ICA$ und $\angle CLN = \angle IAC$ gilt. Zeige, dass die Dreiecke KIL und ABC den selben Umkreisradius besitzen.

Viel Glück!