MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Sélection IMO 2021

Premier examen
8 mai 2021

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit ABC un triangle avec $\angle BAC = 90°$. On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. La bissectrice de l'angle $\angle BAC$ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en A et P. Soit Q la projection de P sur AB et R la projection de I sur PQ. Montrer que RO coupe CI en son milieu.

2. Pour chaque nombre premier p, il existe quelque part dans le multivers un royaume constitué de p îles numérotées de 1 à p, avec un pont qui relie chaque paire d'îles. Lorsque Jana visite un royaume, elle doit observer la règle suivante à cause des restrictions sanitaires : directement après avoir visité l'île m, elle peut emprunter le pont pour l'île n seulement si

$$p \mid (m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1).$$

Montrer qu'il existe une infinité de royaumes pour lesquels Jana ne peut pas visiter chacune des îles.

3. Soit p un nombre premier impair. Arnaud a suspendu $N \geq 1$ tee-shirts sur une corde à linge. Chaque tee-shirt est soit violet, soit jaune. Il calcule ensuite, pour chaque $1 \leq n \leq N$, la fraction des n premiers tee-shirts qui sont jaunes et écrit ces N fractions sous forme irréductible sur une feuille. Julia trouve la feuille le lendemain et constate que les fractions $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p}$ apparaissent toutes sur la feuille. Montrer que

$$N \geq \frac{p^3 - p}{4}.$$

Bonne chance!

Sélection IMO 2021

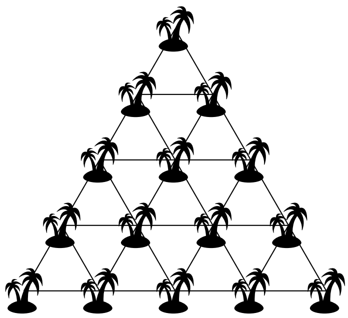
Deuxième examen

9 mai 2021

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit n un nombre entier strictement positif. Les îles de l'Archipel MO sont arrangées selon une grille régulière de triangles équilatéraux qui forment un grand triangle équilatéral de côté n. Le gouverneur bien-aimé Henning a été chargé de construire un pont entre chaque paire d'îles à distance 1. Pour ce faire, Henning choisit, pour chaque île i, deux nombres réels x_i et y_i tels que $x_i^2 + y_i^2 = 1$. Le prix pour construire un pont de l'île i à l'île j est $1 + x_i x_j + y_i y_j$. Déterminer le prix minimal nécessaire pour construire tous les ponts.

Remarque : ci-dessous se trouve une carte de l'Archipel MO dans le cas $n = 4$.



5. Soit n un nombre entier strictement positif. On a marqué certaines cases d'un échiquier $3n \times 3n$. Pour chaque case marquée T, on note $g(T)$ le nombre de cases marquées dans la même ligne à gauche de T et on note $d(T)$ le nombre de cases marquées dans la même colonne en-dessous de T. Déterminer le nombre maximal de cases marquées étant donné que $g(T) + d(T)$ est pair pour chaque case marquée T.

6. On dit qu'un nombre entier strictement positif est *ridicule* si la somme de ses diviseurs positifs est un carré parfait. Montrer qu'il existe une infinité de nombres ridicules.

Bonne chance!

MATHEMATICAL. OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Sélection IMO 2021

Troisième examen

22 mai 2021

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soit n un nombre entier strictement positif. Une suite d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est dite *docile* si

$$1 \cdot a_1 \leq 2 \cdot a_2 \leq \ldots \leq n \cdot a_n.$$

Déterminer le nombre de permutations dociles de $1, 2, \ldots, n$.

8. Soit ABC un triangle avec $BC = CA$. Soit D un point à l'intérieur du segment AB tel que $AD < DB$. Soient P et Q deux points à l'intérieur des segments BC, respectivement CA, tels que $\angle DPB = \angle DQA = 90°$. Soit E l'intersection du segment CQ avec la médiatrice de PQ. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et PQC se coupent en C et F. Supposons que P, E, F sont colinéaires. Montrer que $\angle ACB = 90°$.

9. Trouver tous les polynômes P à coefficients réels sans racines multiples tels que pour tout nombre complexe z l'équation $zP(z) = 1$ est satisfaite si et seulement si $P(z-1)P(z+1) = 0$.

Bonne chance!

Sélection IMO 2021

Quatrième examen

23 mai 2021

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

10. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tel que

$$n^2 + 1 \mid n!$$

11. Trouver toutes les fonctions paires $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$g(f(x) + y) = g(x) + g(y) + yf(x + f(x)).$$

Remarque : Une fonction paire g est une fonction pour laquelle $g(x) = g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

12. Soit ABC un triangle aigu et I le centre de son cercle inscrit. Soient A_1 l'intersection de AI et BC et C_1 l'intersection de CI et AB. De plus, soient M et N les milieux des segments AI et CI respectivement. À l'intérieur des triangles AC_1I et A_1CI on choisit des points K et L tels que $\angle AKI = \angle CLI = \angle AIC$, $\angle AKM = \angle ICA$ et $\angle CLN = \angle IAC$. Montrer que les rayons des cercles circonscrits aux triangles KIL et ABC sont égaux.

Bonne chance!