MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO-Selektion 2020

1. Prüfung

9. Mai 2020

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Betrachte ein $n \times n$ Schachbrett mir der normalen Schachbrettfärbung. Ein Zug besteht darin, ein 1×1 Feld auszuwählen und die Farbe von allen Feldern in derselben Reihe und derselben Spalte zu wechseln (auch die Farbe des ausgwählten Feldes). Für welche n ist es möglich, ein einfarbiges Schachbrett nach einer endlichen Anzahl Züge zu erhalten?

2. Finde alle positiven ganzen Zahlen n, sodass es eine unendliche Menge A positiver ganzer Zahlen mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle paarweise verschiedenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ sind die Zahlen

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{und} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

teilerfremd.

3. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt O. Sei AB eine Sehne dieses Kreises mit Mittelpunkt $M \neq O$. Die Tangenten von k an A und B schneiden sich in T. Die Gerade l geht durch T und schneidet k in C und D, mit $CT < DT$ und $BC = BM$.

Beweise, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ADM die Spiegelung von O an der Geraden AD ist.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

IMO-Selektion 2020

2. Prüfung

10. Mai 2020

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Finde alle ungeraden natürlichen Zahlen n, sodass für alle teilerfremden Teiler a, b von n gilt:

$$a + b - 1 \mid n.$$

5. Finde alle Polynome Q mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für jede Primzahl p und alle positiven ganzen Zahlen a, b mit $p \mid ab - 1$ folgende Bedingung gilt:

$$p \mid Q(a)Q(b) - 1.$$

6. Zeige, dass es für jede positive ganze Zahl n eine endliche Teilmenge von Feldern eines unendlichen Schachbrettes gibt, sodass es auf genau n Arten mit identischen 1×2 Dominos bedeckt werden kann.

Viel Glück!

IMO-Selektion 2020

3. Prüfung

23. Mai 2020

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass $0 \leq f(x) \leq 2x$ für alle $x \geq 0$ gilt, und sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x+f(y)).$$

8. Sei I der Inkreismittelpunkt eines nicht gleichschenkligen Dreiecks ABC. Sei F der Schnittpunkt der Senkrechten auf AI durch I mit der Gerade BC. Sei M der Punkt auf dem Umkreis von ABC, sodass $MB = MC$ gilt und sich M auf der gleichen Seite der Gerade BC befindet wie A. Sei N der zweite Schnittpunkt der Geraden MI mit dem Umkreis des Dreiecks BIC. Zeige, dass FN eine Tangente an den Umkreis von BIC ist.

9. Wir nennen eine Menge S ganzer Zahlen *biZar*, wenn für jede positive ganze Zahl n und alle $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$ auch alle ganzzahligen Wurzeln des Polynoms $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ in S sind, falls dieses nicht das Null-Polynom ist. Finde alle biZaren Mengen ganzer Zahlen, welche alle Zahlen der Form $2^a - 2^b$, wobei a und b positive ganze Zahlen sind, enthalten.

Viel Glück!

IMO-Selektion 2020

4. Prüfung

24. Mai 2020

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei ABC eine Dreieck mit Umkreis k. Seien A_1, B_1 und C_1 Punkte auf den jeweiligen Seiten BC, CA und AB. Sei X ein Punkt auf k und sei Y der zweite Schnittpunkt der Umkreise von BC_1X und CB_1X. Definiere P und Q als die Schnittpunkte von BY mit B_1A_1, beziehungsweise von CY mit C_1A_1. Zeige, dass A auf der Geraden PQ liegt.

11. Sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen, sodass $0 \leq a_i \leq i$ für jedes $i \geq 0$, und sodass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$

$$\binom{n}{a_0} + \binom{n}{a_1} + \cdots + \binom{n}{a_n} = 2^n.$$

Zeige, dass jede natürliche Zahl in der Folge vorkommt.

12. Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $a + b + c + d = 1$. Zeige, dass

$$\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a}\right)^5 \geq 5^5 \left(\frac{ac}{27}\right)^2.$$

Viel Glück!