MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Selection IMO 2020

Premier examen
9 mai 2020

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $n \geq 2$ un nombre entier. Sur un échiquier $n \times n$ avec la coloration standard, on considère l'opération suivante : on choisit tout d'abord une case et on intervertit ensuite la couleur de toutes les cases dans sa ligne et sa colonne (la case choisie incluse). Pour quels nombres entiers n est-il possible d'obtenir un échiquier monochrome après un nombre fini d'opérations ?

2. Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels qu'il existe un ensemble infini A d'entiers strictement positifs avec la propriété suivante : pour tous les nombres deux à deux distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, les nombres

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{et} \quad a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

sont premiers entre eux.

3. Soit k un cercle de centre O. Soit AB une corde de ce cercle dont le milieu est $M \neq O$. Les tangentes à k aux points A et B se coupent en T. Une droite passant par T intersecte k en C et D de telle manière que $CT < DT$ et $BC = BM$. Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle ADM est la réflection de O par rapport à la droite AD.

Bonne chance!

Selection IMO 2020

Deuxième examen

10 mai 2020

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

4. Déterminer tous les entiers positifs impairs n tels que pour toute paire a, b de diviseurs de n premiers entre eux

$$a + b - 1 \mid n.$$

5. Déterminer tous les polynômes Q à coefficients entiers tels que tout nombre premier p et toute paire d'entiers strictement positifs a, b avec $p \mid ab - 1$ satisfont

$$p \mid Q(a)Q(b) - 1.$$

6. Montrer que pour tout entier strictement positif n, il existe un ensemble fini de cases d'un échiquier infini qui peut être pavé avec des dominos 1×2 indistinguables d'exactement n manières.

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Selection IMO 2020

Troisième examen

23 mai 2020

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

7. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $0 \leq f(x) \leq 2x$ pour tout $x \geq 0$ et telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = f(x+f(y)).$$

8. Soit I le centre du cercle inscrit d'un triangle non-isocèle ABC. Soit F l'intersection de la perpendiculaire à AI passant par I avec BC. Soit M le point sur le cercle circonscrit à ABC tel que $MB = MC$ et tel que M est du même côté de la droite BC que A. Soit N la seconde intersection de la droite MI avec le cercle circonscrit à BIC. Montrer que la droite FN est tangente au cercle circonscrit au triangle BIC.

9. Un ensemble S d'entiers est appelé *biczar* si pour tout entier strictement positif n et pour tous $a_0, a_1, \ldots, a_n \in S$, toutes les racines entières du polynôme $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ appartiennent également à S si ce n'est pas le polynôme zéro. Déterminer tous les ensembles biczar contenant tous les nombres de la forme $2^a - 2^b$ pour a, b des entiers strictement positifs.

Bonne chance!

Selection IMO 2020

Quatrième examen

24 mai 2020

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit ABC un triangle et soit k son cercle circonscrit. Soient A_1, B_1 et C_1 des points à l'intérieur des côtés BC, CA et AB respectivement. Soit X un point sur k et soit Y la seconde intersection des cercles circonscrits à BC_1X et CB_1X. Les points P et Q sont définis comme l'intersection de BY avec B_1A_1 et de CY avec C_1A_1 respectivement. Montrer que la droite PQ passe par A.

11. Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie de nombres entiers positifs ou nuls satisfaisant $a_i \leq i$ pour tout $i \geq 0$ et telle que pour tout entier $n \geq 1$

$$\binom{n}{a_0} + \binom{n}{a_1} + \cdots + \binom{n}{a_n} = 2^n.$$

Montrer que cette suite contient tous les nombres entiers positifs ou nuls.

12. Soient a, b, c, d des nombres réels strictement positifs tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\left(\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a}\right)^5 \geq 5^5 \left(\frac{ac}{27}\right)^2.$$

Bonne chance!