MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Selektion 2019

1. Prüfung

4. Mai 2019

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei ABC ein Dreieck und seien D, E und F die Höhenfusspunkte der Höhen von A, B respektive C. Sei H der Höhenschnittpunkt von Dreieck ABC. Die Strecken EF und AD schneiden sich in G. Sei K der Punkt auf dem Umkreis von Dreieck ABC, der diametral gegenüber von A liegt. Die Gerade AK schneide BC in M. Zeige, dass die Geraden GM und HK parallel sind.

2. Finde die grösste Primzahl p, sodass zwei natürliche Zahlen a und b existieren mit

$$p = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

3. Sei S eine nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen. Zeige, dass mindestens eine der folgenden beiden Aussagen wahr ist:

(i) Es existieren verschiedene endliche, nichtleere Teilmengen F und G von S, sodass gilt:

$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x} = \sum_{x\in G}\frac{1}{x}.$$

(ii) Es existiert eine positive rationale Zahl $r < 1$, sodass für jede endliche, nichtleere Teilmenge F von S gilt:

$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x} \neq r.$$

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Selektion 2019

2. Prüfung

5. Mai 2019

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei p eine Primzahl. Finde alle Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

(i) $P(x) > x$ für alle natürlichen Zahlen x.

(ii) Ist die Folge $(p_n)_{n\geq 0}$ durch $p_0 := p$ und $p_{n+1} := P(p_n)$ für alle $n \geq 0$ gegeben, so existiert für jede natürliche Zahl m ein $l \geq 0$, sodass m ein Teiler von p_l ist.

5. Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC$ und sei M der Mittelpunkt der Strecke BC. Sei P ein Punkt, sodass $PB < PC$ gilt und PA parallel zu BC ist. Ferner seien X und Y Punkte auf den Geraden PB respektive PC, sodass B auf der Strecke PX und C auf der Strecke PY liegt und $\angle PXM = \angle PYM$ gilt. Zeige, dass $APXY$ ein Sehnenviereck ist.

6. Sei (a, b) ein Paar natürlicher Zahlen. Henning und Paul spielen ein Spiel: Zu Beginn befinden sich zwei Stapel mit a beziehungsweise b Münzen auf dem Tisch. Wir nennen das Paar (a, b) die *Startwerte* des Spiels. Henning und Paul spielen nach folgenden Regeln:

- Die Spieler ziehen abwechslungsweise, wobei Henning beginnt.
- In jedem Zug entfernt ein Spieler entweder eine positive Anzahl Münzen von einem der beiden Stapel oder die gleiche positive Anzahl Münzen von beiden Stapeln.
- Der Spieler, der die letzte Münze vom Tisch entfernt, gewinnt das Spiel.

Sei A die Menge aller natürlicher Zahlen a, für die es eine natürliche Zahl $b < a$ gibt, sodass Paul eine Gewinnstrategie für die Startwerte (a, b) hat. Ordne die Elemente von A aufsteigend als $a_1 < a_2 < \ldots$.

(a) Zeige, dass A unendlich viele Elemente enthält.

(b) Zeige, dass die Folge $(m_k)_{k\geq 1}$, gegeben durch $m_k := a_{k+1} - a_k$ für alle $k \geq 1$, niemals periodisch wird.

Bemerkung: Wir sagen, dass eine Folge $(x_k)_{k\geq 1}$ *periodisch wird*, falls es eine ganze Zahl $k_0 \geq 0$ gibt, sodass die Folge $(x_{k+k_0})_{k\geq 1}$ periodisch ist.

Viel Glück!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Selektion 2019

3. Prüfung

18. Mai 2019

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Zeige, dass für alle positiven Zahlen n zwei ganze Zahlen a und b existieren, sodass

$$n \mid 4a^2 + 9b^2 - 1.$$

8. Seien k, n und r natürliche Zahlen mit $r < n$. Quirin besitzt $kn + r$ schwarze und $kn + r$ weisse Socken. Er möchte sie so auf seiner Wäscheleine aufhängen, dass es keine $2n$ aufeinanderfolgenden Socken gibt, von denen n schwarz und n weiss sind. Zeige, dass Quirin dies genau dann schaffen kann, wenn $r \geq k$ und $n > k + r$ gelten.

9. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$. Seien E und F die Höhenfusspunkte der Höhen von B respektive C, sowie M der Mittelpunkt der Strecke BC. Die Tangente an den Umkreis von ABC im Punkt A schneide die Gerade BC in P. Die Parallele zu BC durch A schneide die Gerade EF in Q. Zeige, dass die Geraden PQ und AM senkrecht aufeinander stehen.

Viel Glück!

Selektion 2019

4. Prüfung

19. Mai 2019

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei $n \geq 5$ eine ganze Zahl. Ein Laden verkauft Jonglierbälle in n verschiedenen Farben. Jedes von $n+1$ Kindern kauft drei Jonglierbälle, welche drei unterschiedliche Farben haben, aber keine zwei Kinder kaufen genau die gleiche Farbkombination. Zeige, dass es mindestens zwei Kinder gibt, welche genau einen Ball der selben Farbe gekauft haben.

11. Sei n eine positive ganze Zahl. Bestimme, ob es eine reelle Zahl $\epsilon > 0$ (abhängig von n) gibt, sodass für alle positiven reellen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gilt:

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq (1-\epsilon) \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \epsilon \cdot \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

12. Definiere die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ ganzer Zahlen mit $a_n := 2^n + 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Zeige, dass es in dieser Folge unendlich viele Terme gibt, welche als Summe von zwei oder mehr verschiedenen Termen der Folge ausgedrückt werden können, und auch, dass es unendlich viele Terme in der Folge gibt, die nicht so ausgedrückt werden können.

Viel Glück!