MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Sélection 2019

Premier examen
4 mai 2019

**Temps :** 4,5 heures
**Difficulté :** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points :** Chaque exercice vaut 7 points.

**1.** Soit $ABC$ un triangle et $D$, $E$, $F$ les pieds des hauteurs issues de $A$, $B$ et $C$, respectivement. Soit $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$. Les segments $EF$ et $AD$ se coupent en $G$. Soit $K$ le point diamétralement opposé à $A$ sur le cercle circonscrit au triangle $ABC$. La droite $AK$ coupe $BC$ en $M$. Montrer que les droites $GM$ et $HK$ sont parallèles.

**2.** Trouver le plus grand nombre premier $p$ tel qu'il existe des nombres entiers strictement positifs $a$ et $b$ tels que

$$p = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

**3.** Soit $S$ un ensemble non-vide de nombres entiers strictement positifs. Montrer qu'au moins l'un des deux énoncés suivants est vérifié :

(i) Il existe deux sous-ensembles finis non-vides distincts $F$ et $G$ de $S$ tels que

$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x} = \sum_{x\in G}\frac{1}{x}.$$

(ii) Il existe un nombre rationnel strictement positif $r < 1$ tel que pour tout sous-ensemble fini non-vide $F$ de $S$

$$\sum_{x\in F}\frac{1}{x} \neq r.$$

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Sélection 2019

Deuxième examen
5 mai 2019

**Temps :** 4,5 heures
**Difficulté :** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points :** Chaque exercice vaut 7 points.

**4.** Soit $p$ un nombre premier. Trouver tous les polynômes $P$ à coefficients entiers tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites.

(i) $P(x) > x$ pour tous les entiers strictement positifs $x$.

(ii) Si la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est définie par $p_0 := p$ et $p_{n+1} := P(p_n)$ pour tout $n \geq 1$, alors pour tous les entiers strictement positifs $m$, il existe $l \geq 0$ tel que $m \mid p_l$.

**5.** Soit $ABC$ un triangle tel que $AB = AC$. Soit $M$ le milieu de $BC$. Soit $P$ un point tel que $PB < PC$ et $PA$ est parallèle à $BC$. Soient $X$ et $Y$ des points sur les droites $PB$ et $PC$, respectivement, tels que $B$ se trouve sur le segment $PX$, $C$ se trouve sur le segment $PY$ et $\angle PXM = \angle PYM$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

**6.** Soit $(a, b)$ une paire de nombres entiers strictement positifs. Henning et Paul jouent au jeu suivant : initialement, sur une table, se trouvent deux piles composées de respectivement $a$ et $b$ pièces. On nomme la paire $(a, b)$ la *valeur de départ* du jeu. Henning et Paul jouent d'après les règles suivantes :

- Les joueurs jouent à tour de rôle et Henning commence.
- À chaque coup, un joueur enlève soit un nombre strictement positif de pièces d'une des deux piles, soit le même nombre strictement positif de pièces des deux piles.
- Le joueur qui enlève la dernière pièce de la table gagne.

Soit $A$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs $a$ pour lesquels il existe un nombre entier strictement positif $b < a$ tel que Paul a une stratégie gagnante pour la valeur de départ $(a, b)$. On ordonne les éléments de $A$ par ordre croissant : $a_1 < a_2 < \ldots$.

(a) Montrer que $A$ contient une infinité d'éléments.

(b) Montrer que la suite $(m_k)_{k\geq 1}$ définie par $m_k := a_{k+1} - a_k$, pour tous $k \geq 1$, ne devient jamais périodique

*Remarque* : On dit qu'une suite $(x_k)_{k\geq 1}$ *devient périodique* si il existe un nombre entier $k_0 \geq 0$ tel que la suite $(x_{k+k_0})_{k\geq 1}$ est périodique.

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Sélection 2019

Troisième examen

18 mai 2019

**Temps :** 4,5 heures
**Difficulté :** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points :** Chaque exercice vaut 7 points.

**7.** Montrer que pour tous les nombres entiers strictement positifs $n$, il existe deux nombres entiers $a$ et $b$ tels que

$$n \mid 4a^2 + 9b^2 - 1.$$

**8.** Soient $k$, $n$ et $r$ des nombres entiers strictement positifs tels que $r < n$. Julie a $kn+r$ chaussettes noires et $kn+r$ chaussettes blanches. Elle veut les suspendre sur une corde à linge de telle manière qu'il n'y ait pas $2n$ chaussettes consécutives constituées de $n$ chaussettes noires et $n$ chaussettes blanches. Montrer que Julie peut suspendre ses chaussettes de la sorte si et seulement si $r \geq k$ et $n > k + r$.

**9.** Soit $ABC$ un triangle aigu tel que $AB < AC$. Soient $E$ et $F$ les pieds des hauteurs issues de $B$ et $C$, respectivement, et soit $M$ le milieu de $BC$. La droite tangente au cercle circonscrit à $ABC$ en $A$ coupe la droite $BC$ en $P$. La droite passant par $A$ parallèle à la droite $BC$ coupe la droite $EF$ en $Q$. Montrer que la droite $PQ$ est perpendiculaire à la droite $AM$.

Bonne chance!

MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

# Sélection 2019

Quatrième examen

19 mai 2019

**Temps :** 4,5 heures
**Difficulté :** Les exercices sont classés selon leur difficulté.
**Points :** Chaque exercice vaut 7 points.

**10.** Soit $n \geq 5$ un nombre entier. Un magasin vend des balles de jonglage de $n$ couleurs différentes. Chacun parmi $n+1$ enfants achète trois balles de trois couleurs différentes de telle manière que deux enfants n'ont jamais acheté la même combinaison de couleurs. Montrer qu'il existe au moins deux enfants qui ont acheté exactement une balle de la même couleur.

**11.** Soit $n$ un nombre entier strictement positif. Déterminer s'il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ (dépendant de $n$) tel que, pour tous nombres réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on ait

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq (1-\epsilon) \cdot \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \epsilon \cdot \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

**12.** On définit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres entiers par $a_n := 2^n + 2^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrer qu'il existe une infinité de termes de la suite pouvant être exprimés comme la somme d'au moins deux termes distincts de la suite, de même qu'il existe une infinité de termes de la suite ne pouvant pas s'écrire de la sorte.

Bonne chance!