SMO - Selektion 2018

1. Prüfung - 12. Mai 2018

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $k \geq 0$ eine ganze Zahl. Bestimme alle reellen Polynome P von Grad k mit k verschiedenen reellen Nullstellen, sodass für alle Nullstellen a von P gilt:

$$P(a+1) = 1.$$

2. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. Die Gerade OA schneide die Höhe h_b in P und die Höhe h_c in Q. Sei H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC. Zeige, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks PQH auf der Schwerelinie durch den Punkt A des Dreiecks ABC liegt.

Bemerkung: Die Höhe h_a ist die Gerade durch A, die senkrecht zu BC ist.

3. Entlang der Küste einer kreisrunden Insel befinden sich 20 verschiedene Dörfer. Jedes dieser Dörfer hat 20 Kämpfer, wobei alle 400 Kämpfer unterschiedlich stark sind.

Jeweils zwei benachbarte Dörfer A und B machen nun einen Wettkampf, indem sich jeder der 20 Kämpfer des Dorfs A mit jedem der 20 Kämpfer des Dorfs B misst. Dabei gewinnt jeweils der stärkere Kämpfer. Wir sagen, dass das Dorf A *stärker* ist als das Dorf B, falls in mindestens k der 400 Kämpfe ein Kämpfer von Dorf A gewinnt.

Es stellt sich heraus, dass jedes Dorf stärker als sein Nachbardorf im Uhrzeigersinn ist. Bestimme den maximalen Wert von k, sodass dies der Fall sein kann.

Viel Glück!

SMO - Selektion 2018

2. Prüfung - 13. Mai 2018

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei n eine gerade natürliche Zahl. Wir teilen die Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$ in zwei gleiche grosse Mengen A und B auf, sodass jede der n^2 Zahlen in genau einer der Mengen ist. Seien S_A und S_B die Summe aller Elemente in A respektive B. Bestimme alle n, sodass es eine Aufteilung gibt mit

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{39}{64}.$$

5. Für eine natürliche Zahl n sei ein $n \times n$ Brett gegeben. Wir färben nun k der Felder schwarz ein, sodass es für jeweils drei Spalten maximal eine Reihe gibt, in der alle Kreuzungsfelder mit den drei Spalten schwarz gefärbt sind. Zeige, dass gilt:

$$\frac{2k}{n} \leq \sqrt{8n-7} + 1.$$

6. Seien A, B, C und D vier Punkte, die in dieser Reihenfolge auf einem Kreis liegen. Nehme an, es gibt einen Punkt K auf der Strecke AB, sodass BD die Strecke KC und AC die Strecke KD halbiert. Bestimme den kleinstmöglichen Wert, den $\left|\frac{AB}{CD}\right|$ annehmen kann.

Viel Glück!

SMO - Selektion 2018

3. Prüfung - 26. Mai 2018

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei n eine natürliche Zahl. Wir nennen eine Sequenz bestehend aus $3n$ Buchstaben *rumänisch*, falls die Buchstaben I, M und O alle genau n Mal vorkommen. Ein *swap* ist eine Vertauschung von zwei benachbarten Buchstaben. Zeige, dass für jede rumänische Sequenz X eine rumänische Sequenz Y existiert, sodass mindestens $\frac{3n^2}{2}$ swaps nötig sind, um die Sequenz Y aus der Sequenz X zu erhalten.

8. Bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, sodass für alle ganzen Zahlen $0 \leq i, j \leq n$ gilt:

$$i + j \equiv \binom{n}{i} + \binom{n}{j} \pmod 2.$$

9. Seien a, b, c, d reelle Zahlen. Beweise:

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1) \geq \frac{9}{16}(a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

Viel Glück!

SMO - Selektion 2018

4. Prüfung - 27. Mai 2018

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei ABC ein Dreieck, M der Mittelpunkt der Strecke BC und D ein Punkt auf der Geraden AB, sodass B zwischen A und D liegt. Sei E ein Punkt auf der anderen Seite der Geraden CD als B, sodass $\angle EDC = \angle ACB$ und $\angle DCE = \angle BAC$. Sei F der Schnittpunkt von CE mit der Parallelen zu DE durch A und sei Z der Schnittpunkt von AE und DF. Zeige, dass sich die Geraden AC, BF und MZ in einem Punkt schneiden.

11. Bestimme alle Paare (f, g) zweier Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $f(x) \geq 0$,

(ii) $f(x + g(y)) = f(x) + f(y) + 2yg(x) - f(y - g(y))$.

12. David und Linus spielen folgendes Spiel: David wählt eine Teilmenge Q der Menge $\{1, \ldots, 2018\}$. Dann wählt Linus eine natürliche Zahl a_1 und berechnet die Zahlen $a_2, \ldots, a_{2018}$ rekursiv, wobei a_{n+1} das Produkt der positiven Teiler von a_n ist.

Sei P die Menge der natürlichen Zahlen $k \in \{1, \ldots, 2018\}$, für die a_k eine Quadratzahl ist. Linus gewinnt, falls $P = Q$. Ansonsten gewinnt David. Wer hat eine Gewinnstrategie?

Viel Glück!