OSM - Sélection 2018

Premier examen - 12 mai 2018

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $k \geq 0$ un nombre entier. Déterminer tous les polynômes à coefficients réels P de degré k tels que P possède k zéros réels distincts et tels que pour tous les zéros a de P

$$P(a+1) = 1.$$

2. Soit ABC un triangle aigu et O le centre de son cercle circonscrit. La droite OA coupe la hauteur h_b en P et la hauteur h_c en Q. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle PQH est sur la médiane du triangle ABC passant par A.

Remarque : La hauteur h_a est la droite perpendiculaire à BC passant par A.

3. Il y a 20 villages distincts le long de la côte d'une île circulaire. Chacun de ces villages a 20 combattants, et tous ces 400 combattants sont de force différente.

Chaque paire de villages voisins A et B organise une compétition, au cours de laquelle chacun des 20 combattants du village A se mesure à chacun des 20 combattants du village B. Un combat est toujours remporté par le combattant le plus fort. On dit que le village A est *plus fort* que le village B si, lors de au moins k des 400 combats, le combattant du village A gagne.

Il s'avère que chaque village est plus fort que le village voisin dans le sens des aiguilles d'une montre. Déterminer la valeur maximale de k qui permette une telle issue.

Bonne chance !

OSM - Sélection 2018

Deuxième examen - 13 mai 2018

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit n un nombre naturel pair. On partitionne les nombres $1, 2, \ldots, n^2$ en deux ensembles A et B de taille égale, de telle manière que chacun des n^2 nombres appartient à exactement un des deux ensembles. Soient S_A et S_B la somme de tous les éléments dans A et B respectivement. Déterminer tous les n pour lesquels il existe une partition telle que

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{39}{64}.$$

5. Soit n un nombre naturel. On considère une grille $n \times n$. On colorie k cases en noir, de telle manière que, pour n'importe quelles trois colonnes, il existe au plus une ligne qui intersecte chacune de ces trois colonnes en une case noire. Prouver que

$$\frac{2k}{n} \leq \sqrt{8n-7} + 1.$$

6. Soient A, B, C et D quatre points sur un cercle, placés dans cet ordre. Supposons qu'il existe un point K sur le segment AB tel que BD coupe KC en son milieu et que AC coupe KD en son milieu. Déterminer la valeur minimale que $\left|\frac{AB}{CD}\right|$ peut atteindre.

Bonne chance !

OSM - Sélection 2018

Troisième examen - 26 mai 2018

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

7. Soit n un nombre naturel. Une suite de $3n$ lettres est appelée *roumaine* si les lettres I, M et O y apparaissent chacune exactement n fois. Un *swap* est l'échange de deux lettres voisines. Montrer que pour toute suite roumaine X il existe une suite roumaine Y telle qu'il est impossible d'obtenir Y à partir de X avec strictement moins de $\frac{3n^2}{2}$ swaps.

8. Déterminer tous les nombres naturels $n \geq 2$ tels que pour tous les nombres entiers $0 \leq i, j \leq n$:

$$i + j \equiv \binom{n}{i} + \binom{n}{j} \pmod{2}.$$

9. Soient a, b, c, d des nombres réels. Montrer que

$$(a^2 - a + 1)(b^2 - b + 1)(c^2 - c + 1)(d^2 - d + 1) \geq \frac{9}{16}(a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

Bonne chance !

OSM - Sélection 2018

Quatrième examen - 27 mai 2018

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit ABC un triangle, M le milieu du segment BC et D un point sur la droite AB, tel que B se situe entre A et D. Soit E un point tel que E et B se situent de part et d'autre de la droite CD et tel que $\angle EDC = \angle ACB$ et $\angle DCE = \angle BAC$. Soit F le point d'intersection de CE avec la parallèle à DE passant par A et soit Z le point d'intersection de AE et DF. Prouver que les droites AC, BF et MZ se coupent en un point.

11. Déterminer toutes les paires (f, g) de fonctions $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

- $f(x) \geq 0$,
- $f(x + g(y)) = f(x) + f(y) + 2yg(x) - f(y - g(y))$.

12. David et Linus jouent au jeu suivant : David choisit un sous-ensemble Q de l'ensemble $\{1, \ldots, 2018\}$. Ensuite Linus choisit un nombre naturel a_1 et calcule récursivement les nombres $a_2, \ldots, a_{2018}$, avec a_{n+1} le produit de tous les diviseurs positifs de a_n.

Soit P l'ensemble des entiers $k \in \{1, \ldots, 2018\}$ pour lesquels a_k est un carré parfait. Linus gagne si $P = Q$. Autrement David gagne. Déterminer lequel des joueurs a une stratégie gagnante ?

Bonne chance !