SMO - Selektion 2017

1. Prüfung - 6. Mai 2017

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sodass gilt:

(i) $f(p) > 0$ für alle Primzahlen p,

(ii) $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$ für alle Primzahlen p und alle $x \in \mathbb{Z}$.

2. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und seien $x_1, \dots, x_n$ strikt positive reelle Zahlen. Zeige, dass man $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$ wählen kann, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2.$$

3. Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Wie viele Diagonalen eines regulären n-Ecks kann man maximal einzeichnen, sodass falls sich zwei Diagonalen im Innern schneiden, sie senkrecht aufeinander stehen?

Viel Glück!

SMO - Selektion 2017

2. Prüfung - 7. Mai 2017

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei k ein Kreis und AB eine Sehne von k, sodass der Mittelpunkt von k nicht auf AB liegt. Sei C ein von A und B verschiedener Punkt auf k. Für jede Wahl von C seien P_C und Q_C die Projektionen von A auf BC respektive B auf AC. Weiter sei O_C der Umkreismittelpunkt des Dreiecks P_CQ_CC. Zeige, dass es einen Kreis ω gibt, sodass O_C für jede Wahl von C auf ω liegt.

5. Bestimme die kleinste reelle Konstante C, sodass für beliebige, nicht notwendigerweise verschiedene, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}_{>0}$ immer vier paarweise verschiedene Indizes i, j, k, l existieren, sodass gilt:

$$\left|\frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l}\right| \leq C.$$

6. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt:

$$f(x) - f(x+y) = f(x^2 f(y) + x).$$

Viel Glück!

SMO - Selektion 2017

3. Prüfung - 20. Mai 2017

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Der brasilianische IMO-Leader wählt zwei natürliche Zahlen n und k mit $n > k$, und sagt diese dann seinem Deputy und einem Teilnehmer. Dann flüstert der Leader dem Deputy eine binäre Folge der Länge n ins Ohr. Der Deputy schreibt alle binären Folgen der Länge n auf, die sich genau an k Stellen von der Folge des Leaders unterscheiden. (Beispiel für $n = 3$ und $k = 1$: Wenn der Leader 101 wählt, schreibt der Deputy 001, 100, 111 auf.) Der Teilnehmer schaut sich die Folgen an, die der Deputy aufgeschrieben hat. Nun versucht der Teilnehmer, die ursprüngliche Folge vom Leader herauszufinden.

Wie viele Male muss er mindestens raten (abhängig von n und k), bis er sicher einmal korrekt geraten hat?

Bemerkung: Eine binäre Folge der Länge n ist eine Folge der Länge n, die nur aus 0 und 1 besteht.

8. Finde alle monoton steigenden Folgen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ natürlicher Zahlen, sodass $i + j$ und $a_i + a_j$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ die gleiche Anzahl Teiler haben.

9. Sei ABC ein Dreieck mit $AB = AC \neq BC$ und I dessen Inkreismittelpunkt. Die Gerade BI schneidet AC in D, und die Senkrechte auf AC durch D schneidet AI in E. Zeige: Die Spiegelung von I an AC liegt auf dem Umkreis von Dreieck BDE.

Viel Glück!

SMO - Selektion 2017

4. Prüfung - 21. Mai 2017

Zeit: 4.5 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Finde alle Polynome P mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass $P(2017n)$ für alle natürlichen Zahlen n prim ist.

11. Seien $B = (-1, 0)$ und $C = (1, 0)$ fixe Punkte in der Ebene. Eine nichtleere, beschränkte Teilmenge S der Ebene heisst *nett*, falls die folgenden Bedingungen gelten:

(i) Es gibt einen Punkt T in S, sodass für jeden anderen Punkt Q in S die Strecke TQ vollständig in S liegt.

(ii) Für jedes Dreieck $P_1P_2P_3$ existiert ein eindeutiger Punkt A in S und eine Permutation σ von $\{1, 2, 3\}$, sodass die Dreiecke ABC und $P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}P_{\sigma(3)}$ ähnlich sind.

Zeige, dass es zwei verschiedene nette Teilmengen S und S' der Menge $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ mit folgender Eigenschaft gibt: Das Produkt $BA \cdot BA'$ ist unabhängig von der Wahl des Dreiecks $P_1P_2P_3$, wobei $A \in S$ und $A' \in S'$ jeweils die eindeutigen Punkte aus (ii) für ein beliebiges Dreieck $P_1P_2P_3$ sind.

12. Seien $a, c \in \mathbb{N}$ und sei $b \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass es ein $x \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$a^x + x \equiv b \mod c.$$

Viel Glück!