OSM - Sélection 2017

Premier examen - 6 mai 2017

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

1. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que :

(i) $f(p) > 0$ pour tout nombre premier p,

(ii) $p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x$ pour tout nombre premier p et pour tout $x \in \mathbb{Z}$.

2. Soit $n \geq 1$ un entier positif et soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que l'on peut choisir $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2.$$

3. Soit $n \geq 3$ un entier positif. Quel est le nombre maximal de diagonales d'un n-gone régulier que l'on peut tracer, telles que si deux diagonales tracées se coupent à l'intérieur du n-gone, alors elles sont perpendiculaires ?

Bonne chance !

OSM - Sélection 2017

Deuxième examen - 7 mai 2017

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

4. Soit k un cercle et AB une corde de k tel que le centre de k ne se trouve pas sur AB. Soit C un point sur k différent de A et de B. Pour chaque choix de C, soient P_C et Q_C les projections de A sur BC respectivement B sur AC. Soit encore O_C le centre du cercle circonscrit au triangle $P_C Q_C C$. Montrer qu'il existe un cercle ω tel que O_C se trouve sur ω pour chaque choix de C.

5. Déterminer la plus petite constante réelle C telle que pour tous $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}_{>0}$, pas nécessairement distincts, il existe toujours quatre indices distincts i, j, k, l tels que :

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_l} \right| \leq C.$$

6. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$f(x) - f(x+y) = f(x^2 f(y) + x).$$

Bonne chance !

OSM - Sélection 2017

Troisième examen - 20 mai 2017

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

7. Le Leader de l'équipe IMO brésilienne choisit deux nombres naturels n et k avec $n > k$ et les dit à son Deputy Leader ainsi qu'à un participant. Ensuite, le Leader chuchote à l'oreille de son Deputy une suite binaire de longueur n. Le Deputy écrit toutes les suites binaires de longueur n qui diffèrent de la suite du Leader en exactement k places. (Par exemple pour $n = 3$ et $k = 1$: Si le Leader choisit 101, le Deputy écrit $001, 100, 111$.) Le Participant regarde ensuite les suites que le Deputy a écrites et essaye de trouver la suite choisie par le Leader.

Combien de fois doit-il deviner au minimum (en fonction de n et k) pour être sûr d'avoir trouvé la bonne suite ?

Remarque : Une suite binaire de longueur n est une suite de longueur n composée uniquement de 0 et de 1.

8. Trouver toutes les suites croissantes de nombres naturels $a_1, a_2, a_3, \ldots$ telles que pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $i + j$ et $a_i + a_j$ ont le même nombre de diviseurs.

9. Soit ABC un triangle avec $AB = AC \neq BC$ et I le centre de son cercle inscrit. La droite BI coupe AC en D, et la perpendiculaire à AC passant par D coupe AI en E. Montrer que la réflexion de I par rapport à la droite AC est sur le cercle circonscrit au triangle BDE.

Bonne chance !

OSM - Sélection 2017

Quatrième examen - 21 mai 2017

Temps : 4.5 heures
Difficulté : Les exercices sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

10. Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(2017n)$ est un nombre premier pour tout nombre naturel n.

11. Soient $B = (-1, 0)$ et $C = (1, 0)$ deux points du plan. Un sous-ensemble non-vide et borné S du plan est appelé *incroyable* si les conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Il existe un point T dans S tel que pour chaque autre point Q dans S le segment TQ est entièrement inclus dans S.

(ii) Pour tout triangle $P_1P_2P_3$, il existe un unique point A dans S et une permation σ de $\{1, 2, 3\}$ tels que les triangles ABC et $P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}P_{\sigma(3)}$ sont semblables.

Montrer qu'il existe deux sous-ensembles incroyables différents S et S' de l'ensemble $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ avec la propriété suivante : Le produit $BA \cdot BA'$ est indépendant du choix du triangle $P_1P_2P_3$, où $A \in S$ et $A' \in S'$ sont les points donnés par la propriété (ii) pour le triangle $P_1P_2P_3$.

12. Soient $a, c \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}$. Prouver qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que

$$a^x + x \equiv b \mod c.$$

Bonne chance !