IMO-Selektion - 1. Prüfung

Zürich - 7. Mai 2016

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei n eine natürliche Zahl. Wir nennen ein Paar von Zahlen *unverträglich*, falls ihr grösster gemeinsamer Teiler gleich 1 ist. Wie viele unverträgliche Paare treten mindestens auf, wenn man die Zahlen $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ in n Paare aufteilt?

2. Finde alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, sodass folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x-2)P(x+2) + (x+2)P(x-2) = 2xP(x).$$

3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BCA = 90°$ und H der Höhenfusspunkt von C. Sei D ein Punkt innerhalb des Dreiecks BCH, sodass CH die Strecke AD halbiert. Sei P der Schnittpunkt der Geraden BD und CH. Sei ω der Halbkreis mit Durchmesser BD, der die Strecke CB schneidet. Die Tangente von P an ω berühre diesen in Q. Zeige, dass der Schnittpunkt der Geraden CQ und AD auf ω liegt.

Viel Glück!

IMO-Selektion - 2. Prüfung

Zürich - 8. Mai 2016

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, sodass für beliebige reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$\left(\frac{x_1^n + \ldots + x_n^n}{n} - x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\right)(x_1 + \ldots + x_n) \geq 0.$$

5. Für eine endliche Menge A von natürlichen Zahlen nennen wir eine Aufteilung in zwei disjunkte nichtleere Teilmengen A_1 und A_2 *dämonisch*, falls das kleinste gemeinsame Vielfache von A_1 gleich dem grössten gemeinsamen Teiler von A_2 ist. Bestimme die minimale Anzahl Elemente in A, sodass es genau 2016 dämonische Aufteilungen gibt.

6. Sei n eine natürliche Zahl. Zeige, dass $7^{7^n} + 1$ mindestens $2n + 3$ nicht notwendigerweise verschiedene Primteiler hat.

Bemerkung: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ *hat 3 Primteiler.*

Viel Glück!

IMO-Selektion - 3. Prüfung

Zürich - 21. Mai 2016

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Finde alle natürlichen Zahlen n, sodass gilt:

$$\sum_{\substack{d \mid n \\ 1 \leq d < n}} d^2 = 5(n+1).$$

8. Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq AC$ und M der Mittelpunkt von BC. Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide die Gerade BC in Q. Sei H der Höhenfusspunkt von A auf BC. Die Senkrechte zu AQ durch A schneide die Gerade BC in S. Zeige, dass $MH \cdot QS = AB \cdot AC$ gilt.

9. Finde alle Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(f(x)+y)(f(x-y)+1) = f(f(xf(x+1)) - yf(y-1)).$$

Viel Glück!

IMO-Selektion - 4. Prüfung

Zürich - 22. Mai 2016

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei ABC ein nicht rechtwinkliges Dreieck und M der Mittelpunkt von BC. Sei D ein Punkt auf AB, sodass $CA = CD$ gilt und E ein Punkt auf BC, sodass $EB = ED$ gilt. Die Parallele zu ED durch A schneide die Gerade MD im Punkt I und die Geraden AM und ED schneiden sich im Punkt J. Zeige, dass die Punkte C, I und J auf einer Geraden liegen.

11. Seien m und n natürliche Zahlen mit $m > n$. Definiere

$$x_k = \frac{m+k}{n+k} \text{ für } k = 1, \dots, n+1.$$

Zeige: Wenn alle x_i ganzzahlig sind, ist $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1} - 1$ keine Zweierpotenz.

12. An einer EGMO-Prüfung gibt es drei Aufgaben, wobei bei jeder Aufgabe eine ganzzahlige Punktzahl zwischen 0 und 7 erreicht werden kann. Zeige, dass es unter 49 Schülerinnen immer zwei gibt, sodass die eine in jeder der drei Aufgaben mindestens so gut war wie die andere.

Viel Glück!