IMO-Selektion - 1. Prüfung

Zürich - 2. Mai 2015

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei n eine natürliche Zahl. Was ist die maximale Anzahl 1×1 Quadrate, die man in einem $n \times n$ Quadrat schwarz färben kann, sodass in jedem 2×2 Quadrat höchstens 2 kleine Quadrate schwarz gefärbt sind?

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a, b, c \geq 1$. Zeige, dass gilt:

$$\min\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}, \frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}, \frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq abc.$$

3. Sei ABC ein Dreieck mit $AB > AC$ und sei M der Mittelpunkt der Seite AC. Weiter sei D ein Punkt auf der Seite AB, sodass $DB = DC$ gilt. Die Parallele zu BC durch D und die Gerade BM schneiden sich im Punkt K. Zeige, dass $\angle KCD = \angle DAC$ gilt.

Viel Glück!

IMO-Selektion - 2. Prüfung

Zürich - 3. Mai 2015

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Finde alle Paare (a, b) teilerfremder ganzer Zahlen, sodass gilt:

$$a^2 + a = b^3 + b.$$

5. Sei ABC ein Dreieck. Die Punkte K, L und M liegen auf den Seiten BC, CA und AB, sodass sich die Geraden AK, BL und CM in einem Punkt schneiden. Zeige, dass man von den Dreiecken AML, BKM und CLK zwei wählen kann, sodass die Summe ihrer Inkreisradien mindestens so gross ist wie der Inkreisradius des Dreiecks ABC.

6. Finde alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, sodass folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$P(x)P(x + 1) = P(x^2 + 2).$$

Viel Glück!

IMO-Selektion - 3. Prüfung

Zürich - 16. Mai 2015

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Finde alle nichtleeren endlichen Mengen A von Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche die folgende Eigenschaft erfüllen:

Für alle $f_1, f_2 \in A$ existiert eine Funktion $g \in A$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f_1(f_2(y) - x) + 2x = g(x + y).$$

8. Finde alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, sodass für alle natürlichen Zahlen n, welche keine Primteiler kleiner als 2015 besitzen, gilt:

$$n + c \,|\, a^n + b^n + n.$$

9. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. In der Mitte eines kreisförmigen Gartens steht ein Wachturm. Am Rand des Gartens stehen n gleichmässig verteilte Gartenzwerge. Auf dem Wachturm wohnen aufmerksame Wächter. Jeder Wächter überwacht einen Bereich des Gartens, der von zwei verschiedenen Gartenzwergen begrenzt wird.
Wir sagen, dass Wächter A den Wächter B kontrolliert, falls das gesamte Gebiet von B in dem von A enthalten ist.
Unter den Wächtern gibt es zwei Gruppen: Lehrlinge und Meister. Jeder Lehrling wird von genau einem Meister kontrolliert und kontrolliert selbst niemanden, während Meister von niemandem kontrolliert werden.
Der ganze Garten hat Unterhaltskosten:

- Ein Lehrling kostet 1 Goldstück pro Jahr.
- Ein Meister kostet 2 Goldstücke pro Jahr.
- Ein Gartenzwerg kostet 2 Goldstücke pro Jahr.

Zeige, dass die Gartenzwerge mindestens so viel kosten wie die Wächter.

Viel Glück!

IMO-Selektion - 4. Prüfung

Zürich - 17. Mai 2015

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Nehme an, es existiere ein Punkt P im Innern des Parallelogramms, der auf der Mittelsenkrechten von AB liegt und sodass $\angle PBA = \angle ADP$ gilt.
Zeige, dass $\angle CPD = 2\angle BAP$ gilt.

11. Im Teil-Land gibt es n Städte. Je zwei Städte sind durch eine Einbahnstrasse verbunden, die entweder nur mit dem Töff oder nur mit dem Auto befahrbar ist. Zeige, dass es eine Stadt gibt, von der aus jede andere Stadt entweder mit dem Töff oder mit dem Auto erreicht werden kann.

Bemerkung: Es muss nicht jede andere Stadt mit dem gleichen Verkehrsmittel erreicht werden.

12. Gegeben sind zwei natürliche Zahlen m und n. Zeige, dass es eine natürliche Zahl c gibt, sodass jede von 0 verschiedene Ziffer gleich oft in cm und cn vorkommt.

Viel Glück!