IMO Selektion 2014

erste Prüfung - 3. Mai 2014

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$m^2 + f(n) | mf(m) + n$$

2. Gegeben sind $2n$ Chips, die in einer Reihe liegen. In einem Zug kann man zwei benachbarte Chips vertauschen. Wieviele Züge muss man machen, damit jeder Chip einmal am Anfang und einmal am Ende der Reihe war?

3. Gegeben sind 4 Punkte in der Ebene, sodass die 4 Dreiecke, die sie aufspannen, alle denselben Inkreisradius haben. Zeige, dass die 4 Dreiecke kongruent sind.

Viel Glück !

IMO Selektion 2014

zweite Prüfung - 4. Mai 2014

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Bestimme alle Polynome P mit reellen Koeffizienten, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x + 2014)P(x) = xP(x + 1)$$

5. Sei ABC ein Dreieck, in welchem $\alpha = \angle BAC$ der strikt kleinste Winkel ist, und P ein Punkt auf der Seite BC. Weiter sei D ein Punkt auf der Geraden AB, sodass B zwischen A und D liegt und $\angle BPD = \alpha$ gilt, und E ein Punkt auf der Geraden AC, sodass C zwischen A und E liegt und $\angle EPC = \alpha$ gilt. Zeige, dass sich die Geraden AP, BE und CD genau dann in einem Punkt schneiden, wenn AP und BC senkrecht aufeinander stehen.

6. Zeige, dass es keine zwei verschiedene natürliche Zahlen gibt, sodass deren harmonisches, geometrisches, arithmetisches und quadratisches Mittel alle ebenfalls natürliche Zahlen sind.

Viel Glück !

IMO Selektion 2014

dritte Prüfung - 17. Mai 2014

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Die zwei Kreise ω_1 und ω_2 berühren sich im Punkt A und liegen innerhalb des Kreises Ω. Dabei berührt ω_1 den Kreis Ω im Punkt B und ω_2 berührt Ω im Punkt C. Die Gerade AC schneidet ω_1 ein weiteres Mal im Punkt D.
Zeige, dass DBC ein rechtwinkliges Dreieck ist, falls A, B und C nicht auf einer Geraden liegen.

8. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy)$$

9. Sei n eine natürliche Zahl und $A = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ eine Menge von n Punkten in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Ein *Weg durch* A besteht aus $n-1$ Strecken $P_{\sigma(i)}P_{\sigma(i+1)}$ für $i = 1, \ldots, n-1$, wobei σ eine Permutation von $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist, sodass sich keine zwei Strecken überkreuzen.
Zeige, dass die Anzahl verschiedener Wege durch A genau dann minimal ist, wenn die Punkte aus A ein konvexes n-Eck bilden.

Viel Glück !

IMO Selektion 2014

vierte Prüfung - 18. Mai 2014

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Ein 7×7 Quadrat ist in 49 kleine 1×1 Quadrate unterteilt. Zwei Ameisen laufen den Seiten der kleinen Quadrate entlang, wobei jede Ameise ihren eigenen geschlossenen Weg läuft und alle 64 Eckpunkte der kleinen Quadrate genau einmal besucht.
Welches ist die minimale Anzahl Seiten der kleinen Quadrate, über die beide Ameisen laufen?

11. Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit folgender Eigenschaft:
Für alle Primzahlen $p < n$ ist $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor p$ nicht durch das Quadrat einer natürlichen Zahl grösser als 1 teilbar.
Bemerkung: Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die grösste ganze Zahl mit $\lfloor x \rfloor \leq x$.

12. Gegeben sind eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Wir erweitern die Folge periodisch durch $a_{n+i} = a_i$ für alle $i \geq 1$. Nehme nun an, dass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(i) $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_1 + n$.

(ii) $a_{a_i} \leq n + i - 1$ für $i = 1, 2 \ldots, n$.

Zeige, dass gilt:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n^2$$

Viel Glück !