IMO Selektion 2013

erste Prüfung - 4. Mai 2013

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten AB, BC und CA in den Punkten X, Y und Z. Seien I_1, I_2 und I_3 die Inkreismittelpunkte der Dreiecke AXZ, BYX und CZY. Bestimme alle Tripel (α, β, γ), die $(\angle BAC, \angle CBA, \angle ACB)$ annehmen kann, sodass das Dreieck ABC zu einem Dreieck mit den Eckpunkten I_1, I_2 und I_3 ähnlich ist.

2. Sei P ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle $u, v \in \mathbb{N}$ gilt:

$$u^{2^{2013}} - v^{2^{2013}} | P(u) - P(v).$$

Zeige, dass es ein Polynom Q mit ganzzahligen Koeffizienten gibt, sodass
$P(x) = Q(x^{2^{2013}})$ gilt.

3. Sei n eine natürliche Zahl. Finde die grösste Zahl m, welche folgende Eigenschaft erfüllt:
Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Folge reeller Zahlen. Bezeichne mit a die maximale Länge einer monoton steigenden Unterfolge von $x_1, \ldots, x_n$ und mit b die maximale Länge einer monoton fallenden Unterfolge von $x_1, \ldots, x_n$. Dann gilt $a \cdot b \geq m$.
Bemerkung: Eine monoton steigende (fallende) Unterfolge von $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Folge der Form $x_{i_1} \leq \cdots \leq x_{i_k}$ $(x_{i_1} \geq \cdots \geq x_{i_k})$ mit $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Viel Glück !

IMO Selektion 2013

zweite Prüfung - 5. Mai 2013

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei p eine Primzahl und x, y, z drei verschiedene natürliche Zahlen kleiner als p. Nehme an, dass x^3, y^3 und z^3 den gleichen Rest bei der Division durch p haben. Zeige, dass dann $x^2 + y^2 + z^2$ durch $x + y + z$ teilbar ist.

5. Sei A eine Menge mit $n \geq 1$ Elementen und seien $A_1, \ldots, A_k$ paarweise verschiedene Teilmengen von A. Je zwei dieser Teilmengen sind disjunkt oder eine enthalte die andere. Bestimme den grösstmöglichen Wert von k.

6. Ein Bürgermeister und ein Kopfgeldjäger befinden sich an verschiedenen Punkten eines Quadrats, dessen Seiten aus Spiegeln bestehen. Der Kopfgeldjäger hat eine Laserpistole, dessen Strahl an den Spiegeln reflektiert wird und will damit den Bürgermeister treffen. Die Laserpistole hat nur genug Energie für einen Schuss. Zu seinem Schutz kann der Bürgermeister endlich viele Leibwächter aufstellen. Dies ist auch auf den Seiten des Quadrats möglich, jedoch nicht an den Orten, welche bereits durch den Bürgermeister oder den Kopfgeldjäger besetzt sind. Trifft der Laserstrahl eine Person, so stirbt die Person und der Laserstrahl ist gestoppt. Kann der Bürgermeister seine Leibwächter so platzieren, dass der Kopfgeldjäger ihn unmöglich treffen kann?
Bemerkung 1: Alle beteiligten Personen sind als Punkte zu betrachten und jeder Person sind die Positionen der anderen Beteiligten bekannt.
Bemerkung 2: Falls der Laserstrahl genau in eine Ecke geht, so wird er wieder in diejenige Richtung zurückreflektiert aus der er kam.

Viel Glück !

IMO Selektion 2013

dritte Prüfung - 25. Mai 2013

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Ein $n \times n$-Brett wird vollständig mit 2×2-Quadraten belegt. Die 2×2-Quadrate bestehen aus zwei diagonal gegenüberliegenden schwarzen Einheitsquadraten und aus zwei diagonal gegenüberliegenden weissen Einheitsquadraten. Zum Überdecken dürfen die 2×2-Quadrate gedreht werden und sie dürfen sich auch überlappen, jedoch müssen sie vollständig auf dem $n \times n$-Brett liegen. Wieviele schwarze Felder sind bei einer solchen Überdeckung mindestens sichtbar?

8. Existieren Primzahlen p und q, die

$$p^2 + p + 1 = q^3$$

erfüllen?

9. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, sodass folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) $f\left(f\left(\frac{x}{y}, y\right), z\right) = x \cdot f(1, z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$;

(b) Die Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, welche durch $g(x) = f(x, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert ist, ist monoton.

Viel Glück !

IMO Selektion 2013

vierte Prüfung - 26. Mai 2013

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Finde das grösste $k > 0$, sodass für alle $x, y, z > 0$ mit $x + y + z \leq kxyz$ gilt:

$$\frac{1}{x+y+\sqrt{xy}} + \frac{1}{y+z+\sqrt{yz}} + \frac{1}{z+x+\sqrt{zx}} \leq \sqrt{\frac{3}{k}}.$$

11. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle ACB \geq 90^\circ$ und k der Kreis mit Durchmesser AB und Mittelpunkt O. Der Inkreis von ABC berühre AC und BC in M respektive N. Die Gerade MN schneide k in den Punkten X und Y. Zeige, dass $\angle XOY = \angle ACB$ gilt.

12. Finde alle natürlichen Zahlen n, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sum_{d|n} d^4 = n^4 + n^3 + n^2 + n + 1.$$

Viel Glück !