IMO Selektion 2011

erste Prüfung - 7. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Paare von Primzahlen (p, q) mit $3 \nmid p+1$ so dass

$$\frac{p^3+1}{q}$$

das Quadrat einer natürlichen Zahl ist.

2. Die Gerade g schneide den Kreis k in den Punkten A und B. Die Mittelsenkrechte der Strecke AB schneide k noch einmal in C und D. Sei nun P ein weiterer Punkt auf g, der ausserhalb von k liegt. Die Parallelen zu CA und CB durch P schneiden die Geraden CB und CA in den Punkten X und Y. Beweise, dass XY senkrecht auf PD steht.

3. Betrachte ein Spielbrett mit ungeraden Seitenlängen, das in Einheitsquadrate aufgeteilt ist. Das Brett ohne ein Eckfeld wird irgendwie mit Dominos bedeckt. Man kann nun in einem Zug ein Domino in Längsrichtung um eins verschieben, sodass das vorher leere Feld bedeckt wird, dafür ein neues (zwei Felder davon entfernt) frei wird. Beweise, dass das leere Feld mit einer Folge von Zügen in jede beliebige Ecke des Brettes verschoben werden kann.
Bemerkung: Ein Domino besteht aus aus zwei Einheitsquadraten mit einer gemeinsamen Seite.

Viel Glück !

IMO Selektion 2011

zweite Prüfung - 8. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Sei n ein natürliche Zahl. In einem Affenkäfig mit n Affen stehen n Kletterstangen. Damit die Affen etwas Bewegung bekommen platzieren die Wärter zur Fütterung jeweils eine Banane oben an jeder Stange. Zusätzlich verbinden sie die Stangen mit einer endlichen Anzahl Seile, sodass zwei verschiedene Seilenden an verschiedenen Punkten festgemacht werden. Wenn ein Affe eine Stange hochklettert und ein Seil findet, kann er nicht widerstehen und wird sich über das Seil hangeln bevor er seinen Aufstieg fortsetzt. Jeder Affe startet bei einer anderen Stange. Zeige, dass jeder Affe einen Banane kriegt.

5. Finde natürliche Zahlen a, b, c, so dass die Quersumme von $a+b$, $b+c$ und $c+a$ jeweils kleiner als 5 ist, die Quersumme von $a+b+c$ aber grösser als 50.

6. Finde alle Funktionen $f\ : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ so dass für alle positiven rationalen Zahlen x, y gilt

$$f(f(x)^2 y) = x^3 f(xy).$$

Viel Glück !

IMO Selektion 2011

dritte Prüfung - 21. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Finde alle Polynome $P \neq 0$ mit reellen Koeffizienten, welche die folgende Bedingung erfüllen:

$$P(P(k)) = P(k)^2 \text{ für } k = 0, 1, 2, \ldots, (\deg P)^2$$

8. Zeige, dass es mehr als 10^{13} Möglichkeiten gibt, 81 Könige so auf einem 18×18 Schachbrett zu platzieren, dass sich keine zwei Könige attackieren.
Bemerkung: Zwei Könige können sich attackieren, falls die Felder, auf denen sie stehen, eine gemeinsame Seite oder eine gemeinsame Ecke besitzen.

9. In einem Dreieck ABC mit $AB \neq AC$ sei D die Projektion von A auf BC. Ferner seien E, F die Mittelpunkte der Strecken AD bzw. BC und G die Projektion von B auf AF. Zeige, dass die Gerade EF die Tangente im Punkt F an den Umkreis des Dreiecks GFC ist.

Viel Glück !

IMO Selektion 2011

vierte Prüfung - 22. Mai 2011

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei $ABCD$ ein Quadrat und M ein Punkt im Innern der Strecke BC. Die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BAM$ schneide die Strecke BC im Punkt E. Ferner schneide die Winkelhalbierende des Winkels $\angle MAD$ die Gerade CD im Punkt F. Zeige, dass AM und EF senkrecht aufeinander stehen.

11. Seien $x_1, \ldots, x_8 \geq 0$ reelle Zahlen, sodass für $i = 1, \ldots, 8$ gilt $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$, wobei $x_9 = x_1$ und $x_{10} = x_2$. Beweise die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{8} x_i x_{i+2} \leq 1$$

und finde alle Fälle in denen Gleichheit herrscht.

12. Sei $a > 1$ eine natürliche Zahl und seien f und g Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Angenommen es gibt eine natürliche Zahl n_0, so dass $g(n) > 0$ für alle $n \geq n_0$ und

$$f(n) \mid a^{g(n)} - 1 \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Zeige, dass dann f konstant sein muss.

Viel Glück !