IMO Selektion 2010

erste Prüfung - 8. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Die *Verwuselung* von π ist die Anzahl Paare (i, j) natürlicher Zahlen mit $1 \leq i < j \leq n$ und $a_j < a_i$. Beweise, dass für jede natürliche Zahl k mit $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ mit Verwuselung k existiert.

2. Sei AB ein Durchmesser des Kreises k. Sei t die Tangente an k im Punkt B und seien C, D zwei Punkte auf t, sodass B zwischen C und D liegt. Die Geraden AC bzw. AD schneiden k nochmals in den Punkten E bzw. F. Die Geraden DE bzw. CF schneiden k nochmals in den Punkten G bzw. H. Beweise, dass die Strecken AG und AH dieselbe Länge haben.

3. Eine natürliche Zahl x heisst *gut*, falls x das Produkt einer geraden Anzahl (nicht notwendig verschiedener) Primzahlen ist. Seien a, b natürliche Zahlen und definiere $m(x) = (x + a)(x + b)$.

(a) Beweise, dass zwei verschiedene natürliche Zahlen a, b existieren, sodass

$$m(1), m(2), \ldots, m(2010)$$

alles gute Zahlen sind.

(b) Ist $m(x)$ gut für jede natürliche Zahl x, dann gilt $a = b$.

IMO Selektion 2010

zweite Prüfung - 9. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Die Punkte X, Y, Z liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden mit $|XY| \neq |YZ|$. Sei k_1 bzw. k_2 der Kreis mit Durchmesser XY bzw. YZ. Die Punkte A_1 und B_1 bzw. A_2 und B_2 liegen auf k_1 bzw. k_2, sodass

$$\angle A_1 Y A_2 = \angle B_1 Y B_2 = 90^\circ$$

gilt. Zeige, dass sich die beiden Geraden A_1A_2 und B_1B_2 auf XY schneiden.

5. Sei P eine endliche Menge von Primzahlen und sei $\ell(P)$ die grösstmögliche Anzahl aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, sodass jede dieser Zahlen durch mindestens eine Primzahl aus P teilbar ist. Beweise die Ungleichung $\ell(P) \geq |P|$ und zeige, dass genau dann Gleichheit gilt, wenn das kleinste Element von P grösser ist als $|P|$.

6. Finde alle positiven reellen Lösungen (a, b, c, d) der Gleichung

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{b^2 - ca}{c + 2d + a} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + \frac{d^2 - ac}{a + 2b + c} = 0.$$

IMO Selektion 2010

dritte Prüfung - 23. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. In einem Land gibt es endlich viele Städte und endlich viele Strassen. Jede Strasse verbindet zwei verschiedene Städte und je zwei Städte sind durch höchstens eine Strasse verbunden. Alle Strassen können in beide Richtungen befahren werden und das Strassennetz ist so eingerichtet, dass man jede Stadt von jeder anderen Stadt aus (möglicherweise über Umwege) erreichen kann. Für jede Stadt gibt es zudem eine gerade Anzahl Strassen, die von dieser Stadt wegführen.

Die Regierung beschliesst nun, sämtliche Strassen zu Einbahnstrassen umzubauen. Dies soll so geschehen, dass für jede Stadt die Anzahl herausführender Strassen gleich gross ist wie die Anzahl hineinführender Strassen.

(a) Zeige, dass dies stets möglich ist.

(b) Zeige, dass man immer noch jede Stadt von jeder anderen aus erreichen kann, egal wie die Regierung ihren Plan umsetzt.

8. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle reellen x, y die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x^4 + y^4) = xf(x^3) + y^2 f(y^2).$$

9. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Eine Gerade durch H schneide AB bzw. AC in den Punkten D bzw. E, so dass $|AD| = |AE|$ gilt. Die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ schneide den Umkreis von ADE im Punkt $K \neq A$. Zeige, dass HK die Strecke BC halbiert.

IMO Selektion 2010

vierte Prüfung - 24. Mai 2010

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei P ein relles Polynom, sodass für alle reellen x die Gleichung $P(x) = P(1-x)$ gilt. Beweise, dass ein reelles Polynom Q existiert mit

$$P(x) = Q\big(x(1-x)\big).$$

11. Finde alle ganzen Zahlen n, sodass $2^n + 3^n + 6^n$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist.

12. Bananen, Äpfel und Orangen sind irgendwie auf 100 Kisten verteilt. Beweise, dass man 51 Kisten auswählen kann, die zusammen mindestens die Hälfte der Früchte von jeder Sorte enthalten.