Sélection OIM 2010

Premier examen - 8 Mai 2010

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

1. Soit $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$. La *perturbation* de π est le nombre de paires (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$ et $a_j < a_i$. Prouver que pour tout nombre naturel k avec $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$ il existe une permutation des nombres $1, 2, \ldots, n$ telle que sa perturbation soit k.

2. Soit AB le diamètre du cercle k. Soit t la tangente à k passant par le point B et soient C, D deux points sur t, de telle manière que B soit entre C et D. La droite AC (respectivement AD) coupe k en un deuxième point E (respectivement F). La droite DE (respectivement CF) coupe aussi k en G (respectivement H). Montrer que les segments AG et AH ont la même longueur.

3. Un nombre naturel n est dit *bon*, s'il est le produit d'un nombre pair de nombres premiers (non nécessairement distincts). Pour deux nombres naturels a, b, posons $m(x) = (x + a)(x + b)$.

(a) Montrer qu'il existe deux nombre naturels distincts a, b tels que

$$m(1), m(2), \ldots, m(2010)$$

sont bons.

(b) Montrer que si $m(x)$ est bon pour tout nombre entier x, alors $a = b$.

Sélection OIM 2010

Deuxième examen - 9 Mai 2010

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

4. Les points X, Y, Z sont dans cet ordre sur une droite et $|XY| \neq |YZ|$. Soient k_1 et k_2 les cercles de diamètre XY et YZ respectivement. Les points A_1 et B_1 resp. A_2 et B_2 se situent sur k_1 resp. k_2, de sorte que

$$\angle A_1YA_2 = \angle B_1YB_2 = 90^\circ.$$

Montrer que le point d'intersection des droites A_1A_2 et B_1B_2 est sur XY.

5. Soit P un ensemble fini de nombres premiers et $a(P)$ le plus grand nombre possible de nombres naturels successifs tel que chacun de ses nombres soit divisible par un élément de P. Montrer l'inégalité $a(P) \geq |P|$ et que l'égalité se produit si et seulement si le plus petit élément de P est plus grand que $|P|$.

6. Trouver toutes les solutions (a, b, c, d) réelles positives de l'égalité

$$\frac{a^2 - bd}{b + 2c + d} + \frac{b^2 - ca}{c + 2d + a} + \frac{c^2 - db}{d + 2a + b} + \frac{d^2 - ac}{a + 2b + c} = 0.$$

Sélection IMO 2010

Troisième examen - 23 mai 2010

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

7. Dans un pays, certaines paires de villes sont reliées par des rues, qui peuvent être parcourues dans les deux sens. Une ville n'est jamais reliée directement à elle-même et entre deux villes il y a toujours au plus une rue. Le réseau routier est conçu de telle manière à ce que pour toute paire de villes, on puisse passer de l'une à l'autre (pas forcément de manière directe). En plus, le nombre de routes qui relie une ville avec d'autres est toujours pair.

Le gouvernement a décidé de reconstuire toutes les rues à sens unique. Cela sera fait de telle manière à ce que pour chaque ville, le nombre de routes entrantes soit le même que le nombre de routes sortantes.

(a) Montrer que c'est toujours possible.

(b) Montrer que quelle que soit la manière dont la reconstruction est faite, il sera possible, pour toute paire de villes, de passer de l'une à l'autre.

8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x, y l'équation suivante est satisfaite:

$$f(x^4 + y^4) = xf(x^3) + y^2 f(y^2).$$

9. Soit ABC un triancle à angle aigu et soit H son orthocentre. Une droite passant par H a les points d'intersection D et E avec les droites AB et AC respectivement. Supposons que $|AD| = |AE|$. Soit $K \neq A$ le point d'intersection de la bissectrice de $\angle BAC$ avec le cercle circonscrit du triangle ADE. Montrer que HK divise BC en deux parties égales.

Sélection IMO 2010

Quatrième examen - 24 mai 2010

Durée: 4.5 heures
Chaque exercice vaut 7 points.

10. Soit P un polynôme à coefficients réels tel que pour tout x réel l'équation $P(x) = P(1-x)$ est satisfaite. Montrer qu'il existe un polynôme à coefficients réels Q tel que

$$P(x) = Q(x(1-x)).$$

11. Trouver tous les nombres entiers n, tels que $2^n + 3^n + 4^n$ est le carré d'un nombre rationel.

12. Des bananes, des pommes et des oranges sont réparti de manière arbitraire dans 100 boîtes. Montrer que l'on peut choisir 51 boîtes de sorte qu'elles contiennent au moins la moitié des fruits de chaque sorte.