IMO Selektion 2009

erste Prüfung - 16. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $GERMANYISHOT$ ein reguläres Zwölfeck. Die Geraden GN und MI schneiden sich im Punkt P. Beweise, dass

(a) der Umkreis von Dreieck GIP gleich gross ist wie der Umkreis von $GERMANYISHOT$.

(b) die Strecke PA gleich lang ist wie eine Seite von $GERMANYISHOT$.

2. Finde alle Paare (m, n) ungerader natürlicher Zahlen mit $m, n \leq 2009$ und

$$m \,|\, n^2 + 8, \qquad n \,|\, m^2 + 8.$$

3. Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Permutationen $(a_1, \ldots, a_n)$ der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$ mit der folgenden Eigenschaft:

$$2(a_1 + \ldots + a_k) \quad \text{ist durch } k \text{ teilbar} \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

IMO Selektion 2009

zweite Prüfung - 17. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Für welche natürlichen Zahlen n existiert ein Polynom $P(x)$ mit ganzen Koeffizienten, sodass $P(d) = (n/d)^2$ gilt für alle positiven Teiler d von n?

5. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck und seien P und Q Punkte innerhalb des Vierecks $ABCD$, so dass $PQDA$ und $QPBC$ Sehnenvierecke sind. Nehme an, dass ein Punkt E auf der Strecke PQ existiert, so dass $\angle PAE = \angle QDE$ und $\angle PBE = \angle QCE$. Zeige, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck ist.

6. Sei P die Menge der ersten 2009 Primzahlen und sei X die Menge aller natürlichen Zahlen, welche nur Primfaktoren aus P besitzen. Bestimme alle natürlichen Zahlen k, für die eine Funktion $f : X \to X$ existiert, welche für alle $m, n \in X$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$f(mf(n)) = f(m)n^k.$$

IMO Selektion 2009

dritte Prüfung - 23. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Betrachte eine Menge A von 2009 Punkte in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen. Ein Dreieck, dessen Eckpunkte alle in A liegen, heisst *internes Dreieck*. Beweise, dass jeder Punkt aus A im Innern einer geraden Anzahl interner Dreiecke enthalten ist.

8. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen x, y die folgende Gleichung erfülllt ist:

$$f(f(x) - f(y)) = (x - y)^2 f(x + y).$$

9. In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien BE und CF Höhen. Zwei Kreise durch A und F berühren die Gerade BC bei P und Q, so dass B zwischen C und Q liegt. Beweise, dass sich die Geraden PE und QF auf dem Umkreis von AEF schneiden.

IMO Selektion 2009

vierte Prüfung - 24. Mai 2009

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei n eine natürliche Zahl und seien a, b zwei verschiedene ganze Zahlen mit folgender Eigenschaft: Für jede natürliche Zahl m ist $a^m - b^m$ durch n^m teilbar. Zeige, dass a, b beide durch n teilbar sind.

11. Betrachte n kollineare Punkte $P_1, \ldots, P_n$ und alle Kreise mit Durchmesser P_iP_j für $1 \leq i < j \leq n$. Jeder dieser Kreise wird mit einer von k Farben gefärbt. Eine solche Menge von gefärbten Kreisen heisst ein (n, k)-*Gewusel*. Eine *einfarbige Acht* sind zwei Kreise derselben Farbe, die sich äusserlich tangential berühren. Zeige, dass genau dann jedes (n, k)-Gewusel eine einfarbige Acht enthält, wenn $n > 2^k$ gilt.

12. Seien x, y, z reelle Zahlen, welche die Gleichung $x + y + z = xy + yz + zx$ erfüllen. Beweise die Ungleichung

$$\frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1} \geq -\frac{1}{2}.$$