IMO Selektion 2008

erste Prüfung - 17. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Finde alle Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen, sodass gilt:

$$a \mid bc - 1, \qquad b \mid ca - 1, \qquad c \mid ab - 1.$$

2. Seien m, n natürliche Zahlen. Betrachte ein quadratisches Punktgitter aus $(2m + 1) \times (2n + 1)$ Punkten in der Ebene. Eine Menge von Rechtecken heisst *gut*, falls folgendes gilt:

(a) Für jedes der Rechtecke liegen die vier Eckpunkte auf Gitterpunkten und die Seiten parallel zu den Gitterlinien.

(b) Keine zwei der Rechtecke haben einen gemeinsamen Eckpunkt.

Bestimme den grösstmöglichen Wert der Summe der Flächen aller Rechtecke in einer guten Menge.

3. Sei ABC ein Dreieck mit $\angle ABC \neq \angle BCA$. Der Inkreis k des Dreiecks ABC berühre die Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten D, E bzw. F. Die Strecke AD schneide k ein weiteres Mal in P. Sei Q der Schnittpunkt von EF mit der Rechtwinkligen zu AD durch P. Sei X bzw. Y der Schnittpunkt von AQ mit DE bzw. mit DF. Zeige, dass A der Mittelpunkt der Strecke XY ist.

IMO Selektion 2008

zweite Prüfung - 18. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und B. Sei r eine Gerade durch B, die k_1 in C und k_2 in D schneidet, so dass B zwischen C und D liegt. Sei s die Gerade parallel zu AD, die k_1 in E berührt und zu AD den kleinstmöglichen Abstand hat. Die Gerade AE schneidet k_2 in F. Sei t die Tangente zu k_2 durch F. Beweise dass gilt:

(a) Die Gerade t ist parallel zu AC.

(b) Die Geraden r, s und t schneiden sich in einem Punkt.

5. Seien a, b, c positive reelle Zahlen. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{a}{\sqrt{3a+2b+c}} + \frac{b}{\sqrt{3b+2c+a}} + \frac{c}{\sqrt{3c+2a+b}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a+b+c}.$$

6. Ein reguläres 2008-Eck wird irgendwie mit 2005 sich nicht schneidenden Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl nicht gleichschenkliger Dreiecke, die in einer solchen Zerlegung auftreten können.

IMO Selektion 2008

dritte Prüfung - 24. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Seien a, b natürliche Zahlen. Zeige, dass man die ganzen Zahlen mit drei Farben färben kann, sodass zwei ganze Zahlen mit Differenz a oder b stets verschieden gefärbt sind.

8. Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt im Innern der Strecke BC. Sei X ein weiterer Punkt im Innern der Strecke BC verschieden von D und sei Y der Schnittpunkt von AX mit dem Umkreis von ABC. Sei P der zweite Schnittpunkt der Umkreise von ABC und DXY. Beweise, dass P unabhängig von der Wahl von X ist.

9. Sei $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt

$$f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y).$$

IMO Selektion 2008

vierte Prüfung - 25. Mai 2008

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Sei $P(x) = x^4 - 2x^3 + px + q$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, dessen Nullstellen alle reell sind. Zeige, dass die grösste dieser Nullstellen im Intervall $[1, 2]$ liegt.

11. Sei $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Folge ganzer Zahlen. Der *Nachfolger* von A ist die Folge $A' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ mit

$$a'_k = |\{i < k \mid a_i < a_k\}| - |\{i > k \mid a_i > a_k\}|.$$

Sei A_0 eine endliche Folge ganzer Zahlen und für $k \geq 0$ sei $A_{k+1} = A'_k$ der Nachfolger von A_k. Zeige, dass eine natürliche Zahl m existiert mit $A_m = A_{m+1}$.

12. Seien x, y, n natürliche Zahlen mit $x \geq 3$, $n \geq 2$ und

$$x^2 + 5 = y^n.$$

Zeige, dass jeder Primteiler p von n die Kongruenz $p \equiv 1 \pmod 4$ erfüllt.