IMO Selektion 2007

erste Prüfung - 5. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Die Punkte K und L liegen auf den Seiten AB bzw. CD mit $AK/KB = DL/LC$. Die Punkte P und Q liegen so auf der Strecke KL, dass gilt

$$\angle APB = \angle BCD \qquad \text{und} \qquad \angle CQD = \angle ABC.$$

Zeige, dass die Punkte P, Q, B und C auf einem Kreis liegen.

2. Bestimme die beiden kleinsten natürlichen Zahlen, die sich in der Form $7m^2 - 11n^2$ mit natürlichen Zahlen m und n schreiben lassen.

3. Wir nennen zwei Personen ein *befreundetes Paar*, wenn sie sich kennen, und wir nennen sie ein *nichtbefreundetes Paar*, wenn sie sich nicht kennen (befreundet sein oder nicht befreundet sein ist dabei immer gegenseitig). Seien m, n natürliche Zahlen. Finde die kleinste natürliche Zahl k, sodass Folgendes gilt: In jeder Gruppe von k Leuten gibt es stets $2m$ Leute, die m disjunkte befreundete Paare bilden, oder es gibt $2n$ Leute, die n disjunkte nichtbefreundete Paare bilden.

IMO Selektion 2007

zweite Prüfung - 6. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Ein Paar (r, s) natürlicher Zahlen heisst *gut*, falls ein Polynom P mit ganzen Koeffizienten und paarweise verschiedene ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ und $b_1, \ldots, b_s$ existieren, sodass gilt

$$P(a_1) = P(a_2) = \ldots = P(a_r) = 2 \qquad \text{und} \qquad P(b_1) = P(b_2) = \ldots = P(b_s) = 5.$$

(a) Zeige, dass für jedes gute Paar (r, s) natürlicher Zahlen $r, s \leq 3$ gilt.

(b) Bestimme alle guten Paare.

5. Seien $n > 1$ und m natürliche Zahlen. Ein Parlament besteht aus mn Abgeordneten, die $2n$ Kommissionen gebildet haben, sodass gilt:

(i) Jede Kommission besteht aus m Abgeordneten.

(ii) Jeder Abgeordnete ist Mitglied in genau 2 Kommissionen.

(iii) Je zwei Kommissionen haben höchstens ein gemeinsames Mitglied.

Bestimme in Abhängigkeit von n den grösstmöglichen Wert von m, sodass dies möglich ist.

6. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c \geq abc$. Beweise, dass von den folgenden drei Ungleichungen mindestens zwei richtig sind:

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \qquad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \qquad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6.$$

IMO Selektion 2007

dritte Prüfung - 19. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ eine Folge, die jede der Zahlen $1, 2, \ldots, 2007$ genau einmal enthält. Es wird nun wiederholt folgende Operation ausgeführt: Ist das erste Folgeglied gleich n, dann wird die Reihenfolge der ersten n Folgeglieder umgekehrt. Zeige, dass die Folge nach endlich vielen solchen Operation mit der Zahl 1 beginnt.

8. Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \qquad \text{und} \qquad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Die Diagonalen BD und CE treffen sich in P. Zeige, dass die Gerade AP die Seite CD in deren Mittelpunkt schneidet.

9. Bestimme alle natürlichen Zahlen n, für die genau eine ganze Zahl a mit $0 < a < n!$ existiert, sodass gilt

$$n! \mid a^n + 1.$$

IMO Selektion 2007

vierte Prüfung - 20. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Für eine natürliche Zahl n sei

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor .$$

Beweise, dass es unendlich viele natürliche Zahlen m gibt, für die die Ungleichung $f(m) < f(m+1)$ gilt, und dass es unendlich viele natürlichen Zahlen m gibt, für die die Ungleichung $f(m) > f(m+1)$ gilt.

11. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}.$$

12. Im Dreieck ABC sei J der Mittelpunkt des Ankreises, welcher die Seite BC in A_1 und die Verlängerungen der Seiten AC und AB in B_1 bzw. C_1 berührt. Die Gerade A_1B_1 schneide die Gerade AB rechtwinklig in D. Sei E die Projektion von C_1 auf die Gerade DJ. Bestimme die Grösse der Winkel $\angle BEA_1$ und $\angle AEB_1$.