IMO Selektion 2006

erste Prüfung - 29. April 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Im Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite BC und E die Projektion von C auf AD. Angenommen es gelte $\angle ACE = \angle ABC$. Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig oder rechtwinklig ist.

2. Sei $n \geq 5$ eine ganze Zahl. Bestimme die grösste ganze Zahl k, sodass ein Polygon mit n Ecken und genau k inneren 90°-Winkeln existiert? (Das Polygon muss nicht konvex sein, der Rand darf sich aber nicht selbst überschneiden.)

3. Sei n eine natürliche Zahl. Jede der Zahlen $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist weiss oder schwarz gefärbt. Man kann nun wiederholt eine Zahl auswählen und diese, sowie alle zu ihr nicht teilerfremden Zahlen umfärben. Anfangs sind alle Zahlen weiss. Für welche n kann man erreichen, dass irgendwann alle Zahlen schwarz sind?

IMO Selektion 2006

zweite Prüfung - 30. April 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Die positiven Teiler der natürlichen Zahl n seien $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Bestimme alle n, für die gilt

$$2n = d_5^2 + d_6^2 - 1.$$

5. Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt in dessen Inneren. Sei E ein von D verschiedener Punkt auf der Geraden AD. Seien ω_1 und ω_2 die Umkreise der Dreiecke BDE bzw. CDE. ω_1 und ω_2 schneiden die Seite BC in den inneren Punkten F bzw. G. Der Schnittpunkt von DG und AB sei X, und der Schnittpunkt von DF und AC sei Y. Zeige, dass XY parallel zu BC ist.

6. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung gilt

$$f(f(x) - y^2) = f(x)^2 - 2f(x)y^2 + f(f(y)).$$

IMO Selektion 2006

dritte Prüfung - 13. Mai 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Das Polynom $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1$ besitze die drei reellen Nullstellen $a > b > c$. Finde den Wert des Ausdrucks

$$a^2b + b^2c + c^2a.$$

8. Längs eines Kreises stehen die Zahlen $1, 2, \ldots, 2006$ in beliebiger Reihenfolge. Es können nun wiederholt zwei auf dem Kreis benachbarte Zahlen miteinander vertauscht werden. Nach einer Folge solcher Vertauschungen steht jede der Zahlen diametral gegenüber ihrer Anfangsposition. Beweise, dass mindestens einmal zwei Zahlen mit Summe 2007 vertauscht wurden.

9. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB \neq AC$ und Höhenschnittpunkt H. Der Mittelpunkt der Seite BC sei M. Die Punkte D auf AB und E auf AC seien so, dass $AE = AD$ ist und D, H, E auf einer Geraden liegen. Zeige, dass HM und die gemeinsame Sehne der Umkreise der beiden Dreiecke ABC und ADE rechtwinklig zueinander liegen.

IMO Selektion 2006

vierte Prüfung - 14. Mai 2006

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Beweise die Ungleichung

$$\sqrt{ab + c} + \sqrt{bc + a} + \sqrt{ca + b} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

11. Finde alle natürlichen Zahlen k, sodass $3^k + 5^k$ eine Potenz einer natürlichen Zahl mit Exponent ≥ 2 ist.

12. Eine Raumstation besteht aus 25 Kammern, und je zwei Kammern sind mit einem Tunnel verbunden. Es gibt insgesamt 50 Haupttunnel, die in beide Richtungen benutzt werden können, die restlichen sind alle Einbahntunnel. Eine Gruppe von vier Kammern heisst *verbunden*, falls man von jeder dieser Kammern in jede andere gelangen kann, indem man nur die sechs Tunnel verwendet, welche diese Kammern untereinander verbinden. Bestimme die grösstmögliche Anzahl verbundener Vierergruppen.