IMO Selektion 2004

erste Prüfung - 15. Mai 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei S die Menge aller n-Tupel $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei $X_1, \ldots, X_n$ Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ sind, die nicht alle verschieden sein müssen, und die auch leer sein können. Für $a = (X_1, \ldots, X_n) \in S$ bezeichne

$$E(a) = \text{Anzahl Elemente von } X_1 \cup \ldots \cup X_n.$$

Finde einen expliziten Ausdruck für die Summe

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

2. Bestimme die grösste natürliche Zahl n, sodass

$$4^{995} + 4^{1500} + 4^n$$

eine Quadratzahl ist.

3. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und Inkreismittelpunkt I. Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks AIB, der im Dreieck ABC liegt. Die Geraden durch P, parallel zu CA und CB, schneiden AB in D und E. Die zu AB parallele Gerade durch P schneidet CA und CB in F und G. Zeige, dass sich die beiden Geraden DF und EG auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

IMO Selektion 2004

zweite Prüfung - 16. Mai 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $abc = 1$. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} + \frac{bc}{b^5 + bc + c^5} + \frac{ca}{c^5 + ca + a^5} \leq 1.$$

5. Ein *Bauklotz*, bestehend aus 7 Einheitswürfeln, hat die Form eines $2 \times 2 \times 2$ Würfels mit einem fehlenden Eckeinheitswürfel. Aus einem Würfel der Kantenlänge 2^n, $n \geq 2$, wird ein beliebiger Einheitswürfel entfernt. Zeige, dass sich der verbleibende Körper stets aus Bauklötzen aufbauen lässt.

6. Bestimme alle endlichen Folgen $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ reeller Zahlen, sodass die Zahl k in der Folge genau x_k mal auftritt.

IMO Selektion 2004

dritte Prüfung - 12. Juni 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Für die rellen Zahlen a, b, c, d gelten die Gleichungen

$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}} \quad , \qquad b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}},$$
$$c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}} \quad , \qquad d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}.$$

Zeige, dass gilt $abcd = 2004$.

8. Sei m eine natürliche Zahl grösser als 1. Die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ist definiert durch

$$x_i = \begin{cases} 2^i, & \text{für} \quad 0 \leq i \leq m-1; \\ \sum_{j=1}^{m} x_{i-j} & \text{für} \quad i \geq m. \end{cases}$$

Finde das grösste k, sodass es k aufeinanderfolgende Folgeglieder gibt, die alle durch m teilbar sind.

9. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien $A_1, A_2, \ldots A_n$ verschiedene Teilmengen von X. Zeige: Es gibt ein $x \in X$, sodass die Mengen

$$A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \ldots, A_n \setminus \{x\}$$

alle verschieden sind.

IMO Selektion 2004

vierte Prüfung - 13. Juni 2004

Zeit: 4.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit Höhen $\overline{AU}$, $\overline{BV}$, $\overline{CW}$ und Höhenschnittpunkt H. X liege auf $\overline{AU}$, Y auf $\overline{BV}$ und Z auf $\overline{CW}$. X, Y und Z sind alle von H verschieden. Zeige

(a) Wenn X, Y, Z und H auf einem Kreis liegen, gilt

$$[ABC] = [ABZ] + [AYC] + [XBC],$$

wobei $[PQR]$ die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$ bezeichnet.

(b) Es gilt auch die Umkehrung von (a).

11. Finde alle injektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen $x \neq y$ gilt

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}.$$

12. Finde alle natürlichen Zahlen, die sich in der Form

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

darstellen lassen, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind.