MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Secondo turno 2025

Zürich, Lausanne, Lugano
21 dicembre 2024

Durata: 3 ore

Difficoltà: Gli esercizi relativi ad ogni tema sono ordinati secondo un ordine crescente di difficoltà.

Punti: Ogni esercizio vale 7 punti.

Geometria

G1) Sia ABC un triangolo con cerchio circoscritto Ω, e sia k un cerchio passante per B e C tale che A si trova all'interno di k. La tangente di Ω passante per A interseca k in due punti P e Q, tali che P e C sono su lati diversi di AB. Se M è l'intersezione di AB e PC ed N è l'intersezione di AC e QB, dimostra che MN è parallelo a PQ.

G2) Sia ABC un triangolo con $AC > BC$. Il cerchio ad esso inscritto tocca i lati BC, CA ed AB rispettivamente in D, E ed F. Sia P il punto del segmento AC tale che $BP \parallel DE$. Sia Ω il cerchio circoscritto al triangolo AFD. La linea EF interseca Ω ancora in Q e la linea PQ interseca Ω ancora in R.

Dimostra che $PEBR$ è un quadrilatero ciclico.

Combinatoria

C1) Sia n un intero positivo. Pingu il pinguino ed i suoi n amici pinguini collezionano salmoni. Ogni pinguino ha al massimo n salmoni, e nessuna coppia di due pinguini ha lo stesso numero di salmoni. In quanti modi i $n + 1$ pinguini possono essere divisi in un certo numero di gruppi di grandezza arbitraria, in modo che ogni gruppo abbia esattamente n salmoni in totale?

C2) Gli n partecipandi delle Olimpiadi stanno cercando di scappare da Wonderland. Loro arrivano ad una fila di n porte chiuse, ordinate in grandezza descrescente. Per ogni $1 \leq k \leq n$, c'è esattamente un partecipante che è magro abbastanza da passare k porte, ma nessuna delle altre. Uno ad uno, in un certo ordine, i partecipanti si dirigono verso la fila di porte per passare attraverso una di esse. Uno ad uno, ogni partecipante passa attraverso la fila di porte, partendo da quella più grande. Se passano davanti ad una porta aperta dalla quale riescono a passare, ci passano attraverso e la chiudono. Se raggiungono l'ultima porta dalla quale riescono a passare ed è chiusa, ci passano attraverso e la lasciano aperta dietro di essi. Se alla fine tutte le porte sono ancora chiuse, tutti i partecipanti sono scappati con successo. In quanti ordini diversi possono i n partecipanti dirigersi verso le porte, se vogliono scappare con successo?

Teoria dei numeri

N1) Siano a, b interi positivi. Dimostra che l'espressione

$$\frac{\operatorname{mcd}(a+b, ab)}{\operatorname{mcd}(a, b)}$$

è sempre un intero positivo, e determina tutti i possibili valori che può assumere.

N2) Determinare tutte le terne (a, b, p) di interi positivi per le quali p è primo e l'equazione

$$p(a + b) = a^2(2p^2 - pb + 1)$$

è soddisfatta.

Buona fortuna!