Zweite Runde 2025

MATHEMATICAL. OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zürich, Lausanne, Lugano
21. Dezember 2024

Zeit: 3 Stunden

Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.

Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

G1) Sei ABC ein Dreieck mit Umkreis Ω und sei k ein Kreis, sodass B und C auf k liegen und A im Inneren von k liegt. Die Tangente an Ω durch A schneidet k in den Punkten P und Q, sodass P und C auf verschiedenen Seiten von AB liegen. Falls M der Schnittpunkt von AB und PC und N der Schnittpunkt von AC und QB ist, zeige, dass MN parallel zu PQ ist.

G2) Sei ABC ein Dreieck mit $AC > BC$. Dessen Inkreis berührt die Seiten BC, CA und AB bei D, E beziehungsweise F. Sei P der Punkt auf der Strecke AC, sodass $BP \parallel DE$ gilt. Sei Ω der Umkreis des Dreiecks AFD. Die Linie EF schneidet Ω ein zweites Mal in Q und die Linie PQ schneidet Ω ein zweites Mal in R. Zeige, dass $PEBR$ ein Sehnenviereck ist.

Kombinatorik

K1) Sei n eine natürliche Zahl. Pingu der Pinguin und seine n Pinguin-Freunde sammeln Fische. Jeder Pinguin hat höchstens n Fische und keine zwei Pinguine haben die gleiche Anzahl Fische. Auf wie viele Arten können sich die $n+1$ Pinguine in Gruppen beliebiger Grösse aufteilen, sodass jede Gruppe insgesamt genau n Fische hat?

K2) Die n Mitglieder der Olympiade versuchen, aus dem Wunderland zu flüchten. Sie kommen zu einer Reihe n geschlossener Türen, geordnet von der Grössten bis zur Kleinsten. Für jedes $1 \leq k \leq n$ gibt es ein Mitglied, das genau durch die ersten k Türen passt, jedoch keine weiteren. Eines nach dem anderen, in einer bestimmten Reihenfolge, treten die Mitglieder zur Reihe von Türen vor, um sie zu durchqueren. Jedes Mitglied geht der Reihe entlang, beginnend bei der grössten Tür. Falls es eine offene Tür antrifft, durch die es passt, so geht es durch und schliesst die Tür hinter sich. Erreicht es aber die letzte Tür, durch die es noch passt und sie ist geschlossen, dann öffnet es sie, geht hindurch, und lässt sie hinter sich offen. Wenn am Schluss alle Türen wieder geschlossen sind, dann können alle Mitglieder sicher entkommen. In wie vielen verschiedenen Reihenfolgen können die n Mitglieder zur Reihe der Türen vortreten, um dies zu erreichen?

Zahlentheorie

Z1) Seien a, b natürliche Zahlen. Beweise, dass der Ausdruck

$$\frac{\mathrm{ggT}(a+b, ab)}{\mathrm{ggT}(a, b)}$$

immer eine natürliche Zahl ist, und bestimme alle möglichen Werte, die er annehmen kann.

Z2) Bestimme alle Tripel (a, b, p) natürlicher Zahlen, wobei p eine Primzahl ist und

$$p(a+b) = a^2(2p^2 - pb + 1).$$

Viel Glück!