MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Deuxième tour 2025

Zürich, Lausanne, Lugano
21 décembre 2024

Temps: 3 heures

Difficulté: Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.

Points: Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Ω, et soit k un cercle passant par B et C tel que A se trouve à l'intérieur de k. La tangente à Ω passant par A intersecte k en deux points P et Q, de telle manière que P et C ne sont pas du même côté de AB. Si M est l'intersection de AB et PC, et N est l'intersection de AC et QB, montrer que MN est parallèle à PQ.

G2) Soit ABC un triangle avec $AC > BC$. Son cercle inscrit intersecte les côtés BC, CA, et AB en D, E, et F, respectivement. Soit P le point sur le segment AC tel que $BP \parallel DE$. Soit Ω le cercle circonscrit au triangle AFD. La droite EF intersecte une deuxième fois Ω en Q et la droite PQ intersecte une deuxième fois Ω en R. Montrer que $PEBR$ est un quadrilatère cyclique.

Combinatoire

C1) Soit n un entier strictement positif. Pingu le pingouin et ses n amis pingouins collectent des saumons. Chaque pingouin a au plus n saumons et il n'y a pas deux pingouins avec le même nombre de saumons. De combien de façons est-ce que les $n+1$ pingouins peuvent former des groupes entres eux, tels que chaque groupe possède exactement n saumons au total ?

C2) Les n participants de l'Olympiade tentent de s'échapper du pays des merveilles. Ils arrivent devant une rangée de n portes fermées, ordonnées de la plus grande à la plus petite. Pour chaque $1 \leq k \leq n$, il y a exactement un participant qui passe à travers les premières k portes, mais pas les autres. Un par un, dans un certain ordre, les participants s'avancent vers la rangée de portes pour les franchir. Chaque participant marche le long de la rangée, en commençant par la plus grande porte. S'il arrive à une porte ouverte assez grande pour lui, le participant la franchit et la referme derrière lui. S'il se retrouve devant la dernière porte assez grande pour lui et qu'elle est fermée, il l'ouvre, la franchit, et la laisse ouverte derrière lui. Si à la fin de ce processus, toutes les portes sont fermées, les participants s'échappent sains et saufs. De combien de manières peut-on ordonner les n participants pour assurer leur fuite ?

Théorie des nombres

N1) Soient a, b deux entiers strictement positifs. Montrer que l'expression

$$\frac{\operatorname{pgcd}(a+b, ab)}{\operatorname{pgcd}(a, b)}$$

est toujours un entier strictement positif, et trouver toutes les valeurs qu'elle peut prendre.

N2) Trouver tous les triplets (a, b, p) d'entiers strictement positifs tels que p est un nombre premier et l'équation

$$p(a+b) = a^2(2p^2 - pb + 1)$$

est vérifiée.

Bonne chance!