MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zweite Runde 2024

Zürich
16. Dezember 2023

Zeit: 3 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

G1) Sei ABC ein Dreieck. Die Winkelhalbierende von $\angle ACB$ schneide AB in D. Seien T und H Punkte auf den Umkreisen von CAD respektive CDB, so dass TH eine gemeinsame Tangente an die zwei Umkreise ist und C im Inneren des Vierecks $BATH$ liegt. Beweise, dass $BATH$ ein Sehnenviereck ist.

G2) Seien P und Q zwei Punkte auf einem Kreis k_1 mit Mittelpunkt O. Sei k_2 der Kreis mit Mittelpunkt P, der durch Q verläuft. Die Gerade PQ schneide k_2 ein zweites Mal in X und k_1 schneide k_2 ein zweites Mal in Y. Sei Z der Schnittpunkt von OX mit QY. Beweise: Wenn $PZYX$ ein Sehnenviereck ist, dann ist PYX ein gleichseitiges Dreieck.

Kombinatorik

K1) Sei n eine natürliche Zahl. Annalena hat n verschiedene Schüsseln, nummeriert von 1 bis n, sowie n Äpfel, $2n$ Bananen und $5n$ Erdbeeren. Sie möchte Zutaten in jeder Schüssel zu einem Obstsalat kombinieren. Ein Obstsalat ist *lecker*, wenn er strikt mehr Erdbeeren als Bananen und strikt mehr Bananen als Äpfel enthält. Wie viele Möglichkeiten hat Annalena, alle Zutaten zu verteilen, sodass in jeder unterschiedlichen Schüssel ein leckerer Obstsalat entsteht?

Bemerkung: Ein leckerer Obstsalat darf auch 0 Äpfel enthalten.

K2) Betrachte ein 2024×2024-Quadrat, bei dem die 2024 Felder auf einer der beiden Diagonalen blau gefärbt sind. Sam schreibt in jedes der Felder eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2024^2$, und zwar so, dass jede Zahl genau einmal vorkommt und für alle $2 \leq i \leq 2024^2$ die Felder mit $i-1$ und i eine gemeinsame Seite haben. Beweise, dass es immer zwei blaue Felder gibt, deren Werte die Differenz 2 haben.

Zahlentheorie

Z1) Bestimme alle Tripel (a, b, n) natürlicher Zahlen, wobei a und b beides Teiler von n sind und ausserdem

$$(a+1)(b+1) = n$$

gilt.

Z2) Bestimme alle natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass es für jeden Teiler x von n einen Teiler y von n gibt, sodass $x + y \mid n$ gilt.

Bemerkung: Die Teiler dürfen negativ sein.

Viel Glück!