Deuxième tour 2024

Temps: 3 heures
Difficulté: Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.
Points: Chaque exercice vaut 7 points.

Zürich
16 décembre 2023

Géométrie

G1) Soit ABC un triangle. La bissectrice de l'angle $\angle ACB$ coupe AB en D. Soient T et H des points sur les cercles circonscrits à CAD et CDB respectivement, tels que TH soit une tangente commune aux deux cercles et C soit à l'intérieur du quadrilatère $BATH$. Montrer que $BATH$ est cyclique.

G2) Soient P et Q deux points sur un cercle k_1 de centre O. On note k_2 le cercle centré en P et passant par Q. Soient de plus X la seconde intersection de k_2 avec la droite PQ, et Y la seconde intersection de k_2 avec k_1. Finalement, soit Z l'intersection de OX avec QY. Montrer que si $PZYX$ est cyclique, alors PYX est un triangle équilatéral.

Combinatoire

C1) Soit n un entier positif. Annalena possède n saladiers différents numérotés de 1 à n, ainsi que n pommes, $2n$ bananes et $5n$ fraises. Elle désire combiner des fruits dans chaque saladier pour faire de la salade de fruits. La salade de fruits est dite *délicieuse* si elle contient strictement plus de fraises que de bananes et strictement plus de bananes que de pommes. De combien de manières Annalena peut-elle répartir tous les fruits de manière à faire une salade de fruit délicieuse dans chacun des saladiers ?

Note : Il est possible qu'une salade de fruits délicieuse ne contienne pas de pommes.

C2) Soit une grille 2024×2024, dans laquelle les 2024 cases d'une des deux diagonales sont coloriées en bleu. Sam assigne un des nombres $1, 2, \ldots, 2024^2$ à chaque case de la grille de telle sorte que chaque nombre apparaisse exactement une fois et que les cases contenant $i-1$ et i partagent un côté pour tout $2 \leq i \leq 2024^2$. Montrer qu'il existe toujours deux cases bleues dont les nombres diffèrent d'exactement 2.

Théorie des nombres

N1) Trouver tous les triplets (a, b, n) d'entiers positifs tels que a et b divisent n, et l'égalité

$$(a+1)(b+1) = n$$

est vérifiée.

N2) Déterminer tous les entiers strictement positifs n ayant la propriété que pour tout diviseur x de n il existe un diviseur y de n tel que $x + y \mid n$.

Note : Les diviseurs peuvent être négatifs.

Bonne chance!