MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Secondo turno 2023

Zurigo, Losanna, Lugano
17 dicembre 2022

Durata : 3 ore
Difficoltà : Gli esercizi relativi ad ogni tema sono ordinati secondo un ordine crescente di difficoltà.
Punti : Ogni esercizio vale 7 punti.

Geometria

G1) Sia ABC un triangolo tale che $2 \cdot \angle CBA = 3 \cdot \angle ACB$. I punti D e E si trovano sul lato AC, in modo tale che BD e BE dividano $\angle CBA$ in tre angoli uguali e che D giaccia tra A e E. Inoltre, sia F l'intersezione di AB e della bisettrice di $\angle ACB$. Dimostrare che BE e DF sono paralleli.

G2) Sia ω_1 una circonferenza con diametro JK. Sia t la tangente a ω_1 nel punto J e sia $U \neq J$ un ulteriore punto su t. Sia ω_2 la più piccola circonferenza centrata in U che interseca ω_1 in un solo punto Y. Sia I il secondo punto di intersezione della retta JK con la circonferenza circoscritta al triangolo JYU e sia F il secondo punto di intersezione di KY con ω_2. Dimostrare che $FUJI$ è un rettangolo.

Calcolo combinatorio

C1) Durante la Coppa del Mondo si possono collezionare n differenti figurine Panini. Gli amici di Marco stanno provando a completare le rispettive collezioni, ma nessuno ha ancora una collezione completa! Una coppia di amici viene detta *completa* se la loro collezione combinata contiene almeno una copia di ciascuna figurina. Marco conosce il contenuto della collezione di ciascuno, e vuole portare tutti al ristorante per il proprio compleanno. Tuttavia, non vuole che vi sia alcuna coppia completa di amici seduti allo stesso tavolo.

(i) Dimostrare che Marco potrebbe aver bisogno di riservare almeno n tavoli distinti.

(ii) Dimostrare che n tavoli saranno sempre sufficienti per realizzare l'obiettivo di Marco.

C2) Sia n un numero intero positivo. Roger ha un giardino quadrato di dimensioni $(2n+1) \times (2n+1)$, e vi piazza delle barriere per suddividerlo in sezioni rettangolari. Quando ha finito, vi sono esattamente due sezioni orizzontali di dimensioni $k \times 1$ ed esattamente due sezioni verticali di dimensioni $1 \times k$ per ogni intero **pari** k compreso tra 1 e $2n+1$, oltre a una singola sezione quadrata di dimensioni 1×1. Quanti modi vi sono per Roger di ottenere una tale suddivisione?

Teoria dei numeri

N1) Determinare tutti i valori interi che l'espressione

$$\frac{pq + p^p + q^q}{p+q}$$

può assumere, laddove p e q sono entrambi numeri primi.

N2) Determinare tutte le terne (a, b, p) di interi positivi per le quali p è primo e l'equazione

$$(a+b)^p = p^a + p^b$$

è soddisfatta.

Buona fortuna!