MATHEMATICAL. OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Zweite Runde 2023

Zürich, Lausanne, Lugano
17. Dezember 2022

Zeit: 3 Stunden
Schwierigkeit: Die Aufgaben eines Themenbereichs sind der Schwierigkeit nach geordnet.
Punkte: Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

Geometrie

G1) Sei ABC ein Dreieck, welches $2 \cdot \angle CBA = 3 \cdot \angle ACB$ erfüllt. Die Punkte D und E liegen auf der Seite AC, sodass BD und BE den Winkel $\angle CBA$ in drei gleich grosse Winkel unterteilen und sodass D zwischen A und E liegt. Sei F ausserdem der Schnittpunkt von AB und der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$. Zeige, dass BE und DF parallel sind.

G2) Sei ω_1 ein Kreis mit Durchmesser JK. Sei t die Tangente an ω_1 bei J und sei $U \neq J$ ein weiterer Punkt auf t. Sei ω_2 der kleinere Kreis mit Mittelpunkt U, welcher ω_1 an einem einzigen Punkt Y berührt. Sei I der zweite Schnittpunkt von JK mit dem Umkreis des Dreiecks JYU und sei F der zweite Schnittpunkt von KY mit ω_2. Zeige, dass $FUJI$ ein Rechteck ist.

Kombinatorik

K1) Während der Weltmeisterschaft gibt es n unterschiedliche Panini-Sticker zu sammeln. Marcos Freunde versuchen alle ihre Sammlungen zu vervollständigen, jedoch hat bis jetzt noch keiner alle Sticker! Wir nennen ein Paar zweier seiner Freunde *komplett*, falls ihre kombinierte Sammlung jeden Sticker mindestens einmal enthält. Marco weiss, wer welche Sticker hat und möchte alle seine Freunde für seinen Geburtstag in ein Restaurant einladen. Er will jedoch verhindern, dass ein komplettes Paar am gleichen Tisch sitzt.

(i) Zeige, dass Marco vielleicht mindestens n Tische reservieren muss.

(ii) Zeige, dass n Tische immer ausreichen, um Marcos Ziel zu erreichen.

K2) Sei n eine natürliche Zahl. Roger hat einen quadratischen Garten der Grösse $(2n+1) \times (2n+1)$. Er errichtet Zäune, um diesen in rechteckige Beete zu unterteilen. Er möchte genau zwei horizontale $k \times 1$ Beete und genau zwei vertikale $1 \times k$ Beete für jede **gerade** Zahl k zwischen 1 und $2n+1$, sowie ein einzelnes quadratisches Beet der Grösse 1×1 wenn er fertig ist. Auf wie viele unterschiedliche Arten kann Roger seinen Garten unterteilen?

Zahlentheorie

Z1) Finde alle ganzzahligen Werte, die der Ausdruck

$$\frac{pq + p^p + q^q}{p + q}$$

annehmen kann, wobei p und q Primzahlen sind.

Z2) Finde alle Tripel (a, b, p) natürlicher Zahlen, sodass p eine Primzahl ist und die Gleichung

$$(a + b)^p = p^a + p^b$$

erfüllt ist.

Viel Glück!