MATHEMATICAL.
OLYMPIAD.CH
MATHEMATIK-OLYMPIADE
OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES
OLIMPIADI DELLA MATEMATICA

Deuxième tour 2023

Zurich, Lausanne, Lugano
17 décembre 2022

Temps : 3 heures
Difficulté : Les exercices d'un même thème sont classés selon leur difficulté.
Points : Chaque exercice vaut 7 points.

Géométrie

G1) Soit ABC un triangle tel que $2 \cdot \angle CBA = 3 \cdot \angle ACB$. Les points D et E sont sur le côté AC, tels que BD et BE divisent $\angle CBA$ en trois angles égaux et que D soit entre A et E. De plus, soit F l'intersection de AB et de la bissectrice de $\angle ACB$. Montrer que BE et DF sont parallèles.

G2) Soit ω_1 un cercle de diamètre JK. Soit t la tangente à ω_1 en J et soit $U \neq J$ un autre point sur t. Soit ω_2 le plus petit cercle centré en U qui intersecte ω_2 en un seul point Y. Soit I la deuxième intersection de la droite JK avec le cercle circonscrit au triangle JYU et soit F la deuxième intersection de la droite KY avec ω_2. Montrer que $FUJI$ est un rectangle.

Combinatoire

C1) Pendant la coupe du monde, n autocollants Panini sont à collectionner. Les amis de Marco veulent compléter leurs collections, mais personne n'a encore de collection complète ! Une paire de deux amis est dite *complète* si leur collection commune contient au moins un de chaque autocollant. Marco connaît les contenus des collections de tous ses amis, et il aimerait les amener à un restaurant pour son anniversaire. En revanche, il ne veut aucune paire complète assise à la même table.

(i) Montrer que Marco pourrait avoir besoin de réserver au moins n tables différentes.

(ii) Montrer que n tables seront toujours suffisantes pour que Marco réalise son désir.

C2) Soit n un entier strictement positif. Roger a un jardin carré de dimensions $(2n+1) \times (2n+1)$, et il y place des barrières pour diviser son jardin en plusieurs parcelles rectangulaires. Une fois terminé, il aura ainsi formé exactement deux rectangles horizontaux $k \times 1$ et deux rectangles verticaux $1 \times k$ pour chaque entier k **pair** entre 1 et $2n+1$, ainsi qu'un seul carré 1×1. Combien Roger a-t-il de manières de le faire ?

Théorie des nombres

N1) Trouver toutes les valeurs entières que l'expression

$$\frac{pq + p^p + q^q}{p + q}$$

peut prendre, où p et q sont des nombres premiers.

N2) Trouver tous les triplets (a, b, p) d'entiers strictement positifs où p est premier et l'équation

$$(a + b)^p = p^a + p^b$$

est vérifiée.

Bonne chance!