Secondo turno 2022

Zurigo, Losanna, Lugano
18 dicembre 2021

Durata : 3 ore
Difficoltà : Gli esercizi relativi ad ogni tema sono ordinati secondo un ordine crescente di difficoltà.
Punti : Ogni esercizio vale 7 punti.

Geometria

G1) Sia k con centro in O e siano X, A, Y tre punti giacenti su k in quest'ordine, e tali che che la tangente al cerchio circoscritto del triangolo OXA passante per X e la tangente al cerchio circoscritto del triangolo OAY passante per Y siano parallele. Dimostrare che $\angle XAY = 120°$.

G2) Siano k_1 un cerchio con centro in M e ℓ una retta tangente a k_1 nel punto A. Sia k_2 un cerchio all'interno di k_1 e anch'esso tangente a ℓ nel punto A. Sia P un punto su ℓ distinto da A. La seconda tangente al cerchio k_1 passante per P interseca k_1 nel punto T. Sia B la seconda intersezione di AT e k_2, e sia C la seconda intersezione di PB e k_2. Dimostrare che $ATCM$ è un quadrilatero ciclico.

Combinatoria

C1) Una classe scolastica di $n \geq 2$ bambini sta scattando delle fotografie a gruppi. Per ogni gruppo con almeno un bambino viene scattata esattamente una fotografia raffigurante tale gruppo. Le fotografie vengono poi appese in varie aule della scuola, in modo tale che ciascun bambino compaia in al massimo una fotografia per stanza.

(i) Dimostrare che questo è possibile se la scuola ha 2^{n-1} stanze.

(ii) Dimostrare che questo non è possibile se la scuola ha meno di 2^{n-1} stanze.

C2) Vi sono 924 fan della nazionale di calcio del Liechtenstein, provenienti o dal Liechtenstein o dalla Svizzera, che si sono riuniti per ottenere gli autografi dei propri giocatori preferiti. La squadra è costituita da 11 giocatori e ciascun fan ha esattamente 6 giocatori preferiti. Due persone provenienti dalla stessa nazione non condividono mai lo stesso gruppo di giocatori preferiti. Alla fine, ciascun fan ottiene esattamente un autografo da uno dei propri giocatori preferiti. Dimostrare che esiste un giocatore che ha dato un autografo sia a un fan del Liechtenstein sia a un fan svizzero.

Teoria dei numeri

N1) Determinare tutte le coppie (m, p), dove m è un numero naturale e p è un numero primo, per le quali è soddisfatta l'equazione

$$p^2 + pm = m^3.$$

N2) Siano n un numero intero positivo e d un divisore positivo di n. Dimostrare che se la frazione

$$\frac{d^2 + d + 1}{n + 1}$$

è un numero intero, allora è uguale a 1.

Buona fortuna!